

# Análise de Desempenho do Algoritmo NLMS em Regime Permanente

Eduardo Vinicius Kuhn e Rui Seara

**Resumo**—Neste artigo, considerando sinais de entrada gaussianos, expressões de modelo que descrevem o comportamento do algoritmo NLMS (*normalized least-mean-square*) em regime permanente são derivadas. Especificamente, expressões analíticas para o erro quadrático médio em excesso (EQME) em regime permanente e o desajuste são aqui obtidas, as quais permitem prever o comportamento do algoritmo em uma ampla faixa de cenários de operação. Além disso, para o caso de sinais de entrada não-correlacionados, expressões relacionando os algoritmos LMS (*least-mean-square*) e NLMS são também estabelecidas. Resultados de simulação são mostrados e discutidos, visando atestar a precisão das expressões de modelo aqui obtidas.

**Palavras-chave**—Algoritmo NLMS, desajuste, filtragem adaptativa, modelagem estocástica, regime permanente.

**Abstract**—In this paper, considering Gaussian input data, model expressions that describe the steady-state behavior of the normalized least-mean-square (NLMS) algorithm are derived. Specifically, analytical expressions for the excess mean-square error (EMSE) in steady state and misadjustment are obtained, allowing to predict satisfactorily the algorithm behavior in a wide range of operating scenarios. Moreover, for the case of uncorrelated input data, expressions relating the least-mean-square (LMS) and NLMS algorithms are also established. Simulation results are shown and discussed, aiming to attest the accuracy of the model expressions obtained here.

**Keywords**—NLMS algorithm, misadjustment, adaptive filtering, stochastic modeling, steady state.

## I. INTRODUÇÃO

Devido à sua baixa complexidade computacional e alta robustez em uma ampla faixa de cenários de operação, o algoritmo NLMS (*normalized least-mean-square*) tem se tornado um dos mais bem conhecidos e utilizados algoritmos adaptativos da literatura. Desde a sua concepção em 1937 por Kaczmarz [1] (correntemente creditada também a [2] e [3]), o algoritmo NLMS e suas variações vêm sendo usados com sucesso em muitas aplicações práticas, tais como cancelamento de eco acústico ou de rede, cancelamento de ruído, controle ativo de ruído, equalização de canal e conformação de feixe em arranjo de antenas [4]-[13]. Assim, levando em consideração o extensivo uso do algoritmo NLMS, o seu modelo estocástico se torna uma ferramenta interessante para prever o comportamento do algoritmo sob diferentes condições de operação. Dessa forma, a necessidade do uso de exaustivas simulações de Monte Carlo (MC) para o ajuste dos parâmetros do algoritmo bem como para a avaliação de seu desempenho pode ser evitada.

Em filtragem adaptativa [4]-[6], a modelagem estocástica de algoritmos adaptativos visa determinar expressões analíticas que descrevam o comportamento de um dado algoritmo para diferentes cenários de operação. Tais expressões permitem prever com certa precisão o

desempenho do algoritmo, propiciando assim um entendimento mais profundo do funcionamento do filtro adaptativo frente à aplicação considerada. Além disso, a partir das expressões de modelo, relações de causa e efeito entre os parâmetros do algoritmo e algumas métricas de desempenho podem ser estabelecidas, as quais fornecem diretrizes consistentes para guiar o ajuste dos parâmetros do algoritmo (i.e., passo de adaptação, comprimento do filtro, dentre outros) [14]-[16]. Eventualmente, para possibilitar a obtenção das expressões de modelo, certas hipóteses simplificativas (baseadas, e.g., no tamanho do passo de adaptação, comprimento do filtro e natureza do sinal de entrada) são consideradas, visando tornar a derivação matematicamente tratável [6]. No entanto, o uso de muitas hipóteses simplificativas dá origem a modelos com limitada aplicabilidade prática (i.e., restritos a condições específicas de operação). Por outro lado, para obter modelos precisos para uma ampla faixa de condições de operação, um reduzido número de hipóteses simplificativas deve ser considerado no desenvolvimento do modelo, implicando dessa forma maiores desafios matemáticos em sua derivação [17]. Em resumo, verifica-se que existe uma relação de compromisso importante entre complexidade matemática, número/consistência das hipóteses simplificativas e precisão do modelo obtido [18].

No que se refere à modelagem do algoritmo NLMS, um dos maiores obstáculos reside no cálculo das matrizes de autocorrelação normalizada surgidas no desenvolvimento do modelo [14]. Recentemente, soluções analíticas precisas têm sido apresentadas para tais matrizes, considerando tanto sinal de entrada real [18] quanto complexo [19], o que resulta em modelos que predizem adequadamente o comportamento médio do algoritmo. Contudo, esses trabalhos [18], [19] carecem de uma análise do comportamento do algoritmo em regime permanente. Na verdade, em se tratando da análise de desempenho do algoritmo NLMS em regime permanente, poucos trabalhos podem ser encontrados na literatura (sobretudo para sinais de entrada correlacionados) [6], [17], [20]-[24], os quais apresentam ainda resultados bastante limitados. Por exemplo, em [20] e [21], a análise foca no caso de sinais de entrada gaussianos reais e não-correlacionados, o que inviabiliza o uso de tais soluções para a maioria dos cenários práticos. Visando sinais de entrada correlacionados, em [23], uma abordagem alternativa é considerada para o cálculo das matrizes de autocorrelação normalizadas; porém tal abordagem restringe a aplicabilidade da solução obtida a filtros adaptativos de alta ordem e sinal de entrada real. Em [6] (assim como em [17] e [22]), as expressões obtidas dependem da determinação de um valor esperado cuja solução para o caso de sinais de entrada gaussianos complexos não tem sido ainda apresentada. Em relação à [24], além das inconsistências apontadas em [19], destaca-se que os resultados fornecidos envolvem a inversa de uma matriz que, para o caso de sinais de entrada correlacionados, não possui solução analítica. Nesse contexto, visando sinais de entrada gaussianos complexos ou reais e correlacionados ou não-correlacionados, o presente trabalho de pesquisa tem por objetivo derivar expressões analíticas (bastante precisas) descrevendo o comportamento do algoritmo NLMS em regime permanente.

Eduardo Vinicius Kuhn e Rui Seara, LINSE - Laboratório de Circuitos e Processamento de Sinais, Departamento de Engenharia Elétrica, Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis-SC, Brasil, e-mails: kuhn@linse.ufsc.br; seara@linse.ufsc.br.

Este trabalho foi parcialmente financiado pelo Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq).

## II. DESCRIÇÃO DO PROBLEMA

Conforme mencionado anteriormente, expressões de modelo descrevendo o comportamento médio do algoritmo NLMS juntamente com soluções analíticas precisas para as matrizes de autocorrelação normalizadas têm sido apresentadas em [14], [18]-[20], considerando tanto sinais de entrada gaussianos complexos quanto reais. Aqui, os resultados mais relevantes são brevemente revisitados no intuito de padronizar a terminologia usada ao longo deste trabalho de pesquisa, bem como fornecer o embasamento necessário para o seu desenvolvimento.

A partir de [19], verifica-se que a curva de aprendizagem do algoritmo NLMS, a qual descreve a evolução do erro quadrático médio (EQM), pode ser expressa como

$$J(n) = J_{\min} + J_{\text{ex}}(n) \quad (1)$$

com

$$J_{\min} = \sigma_z^2 \quad (2)$$

caracterizando o EQM mínimo [obtido quando  $\mathbf{w}(n) = \mathbf{w}_o$ ] e

$$J_{\text{ex}}(n) = \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{k}'(n) \quad (3)$$

o EQM em excesso (EQME), onde  $\boldsymbol{\lambda}$  denota um vetor contendo os autovalores de  $\mathbf{R}$  e  $\mathbf{k}'(n)$ , um vetor com os elementos da diagonal da matriz de covariância do vetor de erro nos coeficientes.

Uma expressão recursiva para os elementos da diagonal da matriz de covariância do vetor de erro nos coeficientes pode ser escrita como [14], [18]-[20]

$$\mathbf{k}'(n+1) = \mathbf{B}\mathbf{k}'(n) + \mathbf{g}\mathbf{s} \quad (4)$$

onde

$$\mathbf{B} = \mathbf{I} - 2\mu\mathbf{H} + \mu^2(\zeta\mathbf{T} + \mathbf{P}) \quad (5)$$

e

$$\mathbf{g} = \mu^2 J_{\min} \quad (6)$$

com  $\zeta$  assumindo valor 1 para sinal de entrada complexo e 2 para real (para detalhes veja [19]).

Em (4) e (5), observa-se que a recursão que descreve a evolução dos elementos da diagonal da matriz de covariância do vetor de erro nos coeficientes requer o conhecimento das soluções das matrizes de autocorrelação normalizada, representadas no modelo através das matrizes diagonais  $\mathbf{H}$  e  $\mathbf{T}$ , da matriz cheia  $\mathbf{P}$  e do vetor  $\mathbf{s}$ . No entanto, tais soluções diferem dependendo das características do sinal de entrada (veja Tabela I), devendo o usuário do modelo adotar uma solução ou outra, dependendo do cenário de operação considerado.

Portanto, a partir das expressões de modelo (1)-(6) descrevendo o comportamento médio da curva de aprendizagem do algoritmo NLMS e das soluções analíticas das matrizes de autocorrelação normalizadas (dadas na Tabela I), expressões que regem o comportamento do algoritmo em regime permanente podem ser determinadas como segue.

TABELA I

SUMÁRIO DAS SOLUÇÕES PARA AS MATRIZES DE AUTOCORRELAÇÃO NORMALIZADA

| Sinal de entrada gaussiano |                    | $\mathbf{H}$  | $\mathbf{T}$ | $\mathbf{P}$ | $\mathbf{s}$ |
|----------------------------|--------------------|---------------|--------------|--------------|--------------|
| complexo                   | correlacionado     | [19, (6)]     | [19, (26)]   | [19, (27)]   | [19, (28)]   |
|                            | não-correlacionado | [19, Seção D] |              |              |              |
| real                       | correlacionado     | [18, (8)]     | [18, (14)]   | [18, (15)]   | [18, (16)]   |
|                            | não-correlacionado | [14, (6.6)]   |              | [20, (29)]   |              |

## III. ANÁLISE EM REGIME PERMANENTE

Nesta seção, expressões de modelo que descrevem o comportamento do algoritmo NLMS em regime permanente são derivadas. Tais expressões possibilitam ao projetista inferir sobre as relações de causa e efeito entre os parâmetros do algoritmo e algumas métricas de desempenho usualmente consideradas na análise de algoritmos adaptativos. Além disso, para sinais de entrada não-correlacionados, importantes relações entre os algoritmos LMS e NLMS são estabelecidas.

## A. EQME em Regime Permanente

Fazendo  $n \rightarrow \infty$  em ambos os lados de (3), uma expressão para o EQME em regime permanente pode ser obtida [4]-[6]

$$J_{\text{ex}}(\infty) = \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{k}'(\infty) \quad (7)$$

o que implica que um estudo mais aprofundado de (4) se faz necessário. Para tal, a equação de diferenças vetorial de  $\mathbf{k}'(n)$  é primeiramente reescrita como

$$\mathbf{k}'(n) = \mathbf{B}^n \mathbf{k}'(0) + \mathbf{g} \sum_{m=0}^{n-1} \mathbf{B}^m \mathbf{s}. \quad (8)$$

Logo, fazendo  $n \rightarrow \infty$  e assumindo convergência (garantida quando todos os autovalores de  $\mathbf{B}$  têm módulo menor do que a unidade), o termo função de  $\mathbf{k}'(0)$  tende para zero. Assim, dado que [25]

$$\sum_{m=0}^{\infty} \mathbf{B}^m = (\mathbf{I} - \mathbf{B})^{-1}, \quad |\lambda(\mathbf{B})| < 1, \quad (9)$$

a partir do segundo termo do lado direito de (8), obtém-se

$$\mathbf{k}'(\infty) = \mathbf{g}(\mathbf{I} - \mathbf{B})^{-1} \mathbf{s}. \quad (10)$$

De (10), observa-se que a solução de  $\mathbf{k}'(\infty)$  envolve o cálculo da inversa de  $(\mathbf{I} - \mathbf{B})$ . Entretanto, para o caso mais geral (sinais de entrada correlacionados), tal inversa não possui solução analítica. Dessa forma, com o objetivo de evitar o uso de técnicas numéricas, as quais tornam a solução dispendiosa, uma solução aproximada para a requerida inversa é aqui considerada. Inicialmente, usando (5) e (6), (10) é reescrita como

$$\mathbf{k}'(\infty) = \frac{\mu}{2} J_{\min} \left( \mathbf{A} - \frac{\mu}{2} \mathbf{P} \right)^{-1} \mathbf{s} \quad (11)$$

onde  $\mathbf{A}$  denota uma matriz diagonal dada por

$$\mathbf{A} = \left( \mathbf{H} - \frac{\mu\zeta}{2} \mathbf{T} \right). \quad (12)$$

Então, usando o lema de inversão de matrizes [25] e assumindo uma condição de adaptação lenta, de (11) tem-se

$$\begin{aligned} \mathbf{k}'(\infty) &= \frac{\mu}{2} J_{\min} \mathbf{A}^{-1} \left[ \mathbf{I} + \frac{\mu}{2} \mathbf{P} \left( \mathbf{I} - \frac{\mu}{2} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{P} \right)^{-1} \mathbf{A}^{-1} \right] \mathbf{s} \\ &\cong \frac{\mu}{2} J_{\min} \mathbf{A}^{-1} \left( \mathbf{I} + \frac{\mu}{2} \mathbf{P} \mathbf{A}^{-1} \right) \mathbf{s}. \end{aligned} \quad (13)$$

Finalmente, substituindo (13) em (7), uma expressão aproximada para o EQME em regime permanente é obtida. Assim,

$$J_{\text{ex}}(\infty) \cong \frac{\mu}{2} J_{\min} \boldsymbol{\lambda}^T \mathbf{A}^{-1} \left( \mathbf{I} + \frac{\mu}{2} \mathbf{P} \mathbf{A}^{-1} \right) \mathbf{s}. \quad (14)$$

Note que, para  $\mu \rightarrow 0$  ou  $J_{\min} \rightarrow 0$ , o EQME em regime permanente é desprezível, ou seja, nessa condição, as flutuações em torno do ponto ótimo são insignificantes.

Portanto, a partir de (14), conhecidas as soluções de  $\mathbf{H}$ ,  $\mathbf{T}$ ,  $\mathbf{P}$  e  $\mathbf{s}$  (indicadas na Tabela I), o EQME em regime

permanente do algoritmo NLMS pode ser predito. Cabe aqui salientar que (14) é válida tanto para sinais de entrada correlacionados quanto não-correlacionados. Contudo, para o caso de sinais de entrada não-correlacionados, uma solução para a matriz inversa requerida em (10) pode ser determinada de forma exata (veja Seção C); logo, recomenda-se o uso de (14) apenas para o caso de sinais de entrada correlacionados.

### B. Desajuste

O desajuste é um parâmetro adimensional que fornece uma medida quantitativa de quão próximo os coeficientes do filtro adaptativo estão em relação ao ótimo no sentido do EQM. Tal métrica é matematicamente definida como [4]

$$\mathcal{M} = \frac{J_{\text{ex}}(\infty)}{J_{\text{min}}}. \quad (15)$$

Assim, substituindo (14) [ou (19)] em (15), uma expressão para o desajuste pode ser determinada.

### C. Resultados Particulares

Aqui, são apresentados alguns resultados particulares obtidos para sinais de entrada gaussianos não-correlacionados. Nesse contexto,  $\mathbf{B}$  é inicialmente expressa como (veja Tabela I)

$$\mathbf{B} = \left[ \mathbf{I} - \frac{2\mu}{M} \mathbf{I} + \frac{\mu^2}{M(M+\zeta)} (\zeta \mathbf{I} + \mathbf{1}\mathbf{1}^T) \right] \quad (16)$$

e  $\mathbf{s}$  como

$$\mathbf{s} = \frac{\mathbf{1}}{M(M-\zeta)\sigma_x^2} \quad (17)$$

onde  $\mathbf{1}$  denota um vetor com elementos unitários,  $\sigma_x^2$ , a variância do sinal de entrada, e  $\zeta$ , define o tipo do sinal de entrada.

Então, substituindo (16) e (17) em (10), e utilizando a identidade de Sherman-Morrison [4, (6.59)] para obter a matriz inversa, (11) resulta em

$$\mathbf{k}'(\infty) = \left[ \frac{\mu}{(2-\mu)(M-\zeta)} \frac{1}{\sigma_x^2} \frac{J_{\text{min}}}{\sigma_x^2} \right] \mathbf{1}. \quad (18)$$

Finalmente, substituindo (18) em (7) e escrevendo  $\lambda = \sigma_x^2 \mathbf{1}$ , obtém-se

$$J_{\text{ex}}(\infty) = \frac{\mu}{(2-\mu)(M-\zeta)} \frac{M}{\sigma_x^2} J_{\text{min}}. \quad (19)$$

Portanto, (19) determina o valor do EQME em regime permanente para o algoritmo NLMS no caso de sinais de entrada gaussianos não-correlacionados, sendo que o desajuste é obtido diretamente substituindo (19) em (15). Note ainda que, para sinais de entrada reais, a solução aqui apresentada está em linha com [6], [21] e [22].

Analisando (19) para valores arbitrados de passo de adaptação, ordem do filtro e EQM mínimo, é possível constatar que o EQME em regime permanente do algoritmo NLMS, operando com dados reais ( $\zeta = 2$ ), será levemente maior em relação ao caso de dados complexos ( $\zeta = 1$ ); especialmente, para filtros de baixa ordem. Além disso, comparando tal expressão com sua versão equivalente para o algoritmo LMS, dada por [6]

$$J_{\text{ex}}^{\text{LMS}}(\infty) = \frac{\mu_{\text{LMS}} M \sigma_x^2}{[2 - \mu_{\text{LMS}} \sigma_x^2 (M + \zeta)]} J_{\text{min}} \quad (20)$$

verifica-se que apenas esta última é função da potência do sinal de entrada, evidenciando assim uma menor susceptibilidade do algoritmo NLMS a variações de potência do sinal de entrada [5], [6].

Tendo em vista que existe uma estreita relação entre os algoritmos LMS e NLMS, expressões que relacionam esses dois algoritmos através do passo de adaptação podem ser determinadas. Para tal, primeiramente, lembre que o comportamento médio do vetor de coeficientes do algoritmo LMS é dado por [4]

$$E[\mathbf{w}(n+1)] = (1 - \mu_{\text{LMS}} \sigma_x^2) E[\mathbf{w}(n)] + \mu_{\text{LMS}} \sigma_x^2 \mathbf{w}_o \quad (21)$$

e do algoritmo NLMS por [19]

$$E[\mathbf{w}(n+1)] = \left( 1 - \frac{\mu}{M} \right) E[\mathbf{w}(n)] + \frac{\mu}{M} \mathbf{w}_o. \quad (22)$$

Assim, a partir de (21) e (22), constata-se (o bem conhecido resultado [26]) que a velocidade de convergência desses dois algoritmos é aproximadamente idêntica quando

$$\mu_{\text{LMS}} = \frac{\mu}{M \sigma_x^2}. \quad (23)$$

De maneira análoga, visando ajustar os algoritmos LMS e NLMS para exibirem um mesmo EQME em regime permanente (ou desajuste), comparando (19) e (20), a seguinte relação é obtida:

$$\mu_{\text{LMS}} = \frac{\mu}{\sigma_x^2 [M - \zeta(1-\mu)]}. \quad (24)$$

Portanto, para valores de passo de adaptação adequadamente ajustados [através de (23) ou (24)], os algoritmos LMS e NLMS apresentam um mesmo comportamento médio, seja na fase transiente ou em regime permanente. Além disso, para valores de  $M$  grande, observa-se que (24) tende assintoticamente à (23), i.e., em tal condição, a expressão que relaciona o passo de adaptação dos algoritmos LMS e NLMS pode ser aproximada por (23); ratificando assim os resultados apresentados em [26].

## IV. RESULTADOS DE SIMULAÇÃO

Nesta seção, no intuito de atestar a precisão das expressões de modelo propostas, quatro exemplos são apresentados considerando um problema de identificação de sistema. Em tais exemplos, o comportamento médio predito a partir das expressões de modelo é confrontado com os resultados obtidos via simulações de MC, considerando a média de 200 realizações independentes. Em todos os cenários, a planta utilizada é normalizada de tal forma que  $\|\mathbf{w}_o\|_2^2 = 1$  [18]; as ordens do sistema a ser identificado  $\mathbf{w}_o$  e do filtro adaptativo são assumidas iguais, sendo os coeficientes do filtro adaptativo inicializados com zero [i.e.,  $\mathbf{w}(0) = \mathbf{0}$ ]. O sinal de entrada é proveniente de um processo auto-regressivo de segunda ordem AR(2), com equação de diferenças [2]

$$x(n) = -a_1 x(n-1) - a_2 x(n-2) + v(n) \quad (25)$$

onde  $a_1$  e  $a_2$  são os coeficientes do processo e  $v(n)$ , um ruído branco gaussiano cuja variância é ajustada através da seguinte relação:

$$\sigma_v^2 = \frac{1-a_2}{1+a_2} [(1+a_2)^2 - a_1^2] \quad (26)$$

tal que  $\sigma_x^2 = 1$ . Exceto quando estabelecido o contrário, o ruído de medição inerente ao ambiente de operação do sistema tem variância  $\sigma_z^2 = 10^{-4}$ , implicando 40 dB SNR.

### A. Sinal de Entrada Gaussiano Complexo

Na sequência, visando verificar a precisão das expressões de modelo propostas, dois exemplos considerando sinais de entrada gaussianos complexos são apresentados. Em tais exemplos, utiliza-se uma planta obtida a partir de um modelo de canal de comunicações (canal de desvanecimento Rayleigh normalizado [6, pg. 325-327] com 20 multipercursos e frequência Doppler de 10 Hz).

1) *Exemplo 1:* Aqui, busca-se avaliar a robustez das expressões de modelo que descrevem o EQME em regime permanente [dadas por (14) e (19)] para diferentes dispersões de autovalores da matriz de autocorrelação do sinal de entrada. Especificamente, os valores de dispersão considerados são  $\chi=1$  [obtido a partir de (25) com  $a_1=a_2=0$ ] e 593,08 (fazendo  $a_1=-0,2$  e  $a_2=0,95$ ). Nesse cenário, a planta utilizada tem  $M=32$  coeficientes.

2) *Exemplo 2:* Este exemplo tem por objetivo avaliar a expressão de modelo (19) frente a um cenário de operação com diferentes níveis de SNR. Para tal, considera-se agora dois valores distintos para a potência do ruído de medição, i.e.,  $\sigma_z^2=10^{-2}$  (20dB SNR) e  $\sigma_z^2=10^{-6}$  (60dB SNR), pois o caso de 40dB SNR é mostrado na Fig. 1(b). Ainda para esse cenário, a dispersão de autovalores da matriz de autocorrelação do sinal de entrada é  $\chi=593,08$ , obtida como no Exemplo 1; a planta utilizada é a mesma do exemplo anterior.

**B. Sinal de Entrada Gaussiano Real**

Nesta seção, considerando sinal de entrada gaussiano real, dois exemplos são apresentados visando avaliar a precisão das expressões de modelo que descrevem o EQME em regime permanente, bem como verificar a expressão que relaciona os algoritmos LMS e NLMS [veja (23) e (24)]. Em tais exemplos, a planta utilizada é obtida a partir de uma janela de Hanning [18].

1) *Exemplo 3:* Neste exemplo, para uma dada dispersão de autovalores da matriz de autocorrelação do sinal de entrada, verifica-se a precisão da expressão de modelo (14) frente a filtros adaptativos com diferentes ordens. Especificamente, consideram-se filtros adaptativos com  $M=8$  e 256 coeficientes, sendo o sinal de entrada obtido através de (25) com  $a_1=-0,2$  e  $a_2$  ajustado (em torno de 0,9) de tal forma que a dispersão de autovalores da matriz de autocorrelação  $\chi$  seja aproximadamente 470 em ambos os casos.

2) *Exemplo 4:* Aqui, o desempenho dos algoritmos LMS e NLMS é comparado para sinais de entrada não-correlacionados, objetivando evidenciar que eles exibem comportamentos similares para valores de passo de adaptação adequadamente escolhidos. Nesse cenário, a planta considerada tem  $M=64$  coeficientes e o passo de adaptação do algoritmo NLMS é  $\mu=0,25$ . Então, visando obter um mesmo EQME em regime permanente, de (24) tem-se que o passo de adaptação do algoritmo LMS deve ser ajustado para  $\mu_{LMS}=0,004$ .

**C. Discussão dos Resultados**

As Figs. 1, 2 e 3 mostram os resultados obtidos através dos Exemplos 1, 2 e 3, respectivamente. A partir de tais figuras, constata-se que as expressões de modelo que descrevem o EQME em regime permanente [dadas por (14) e (19)] conseguem prever satisfatoriamente o comportamento do algoritmo NLMS em diferentes condições de operação, i.e., independentemente do nível de correlação do sinal de entrada, SNR e ordem do filtro adaptativo. Particularmente, em se tratando de sinais de entrada correlacionados, observa-se que a expressão de modelo (14) tem sua precisão levemente degradada à medida que o passo de adaptação é aumentado. Essa característica se deve principalmente à aproximação [veja (13)] considerada para derivar tal expressão. Por outro lado, para sinais de entrada não-correlacionados, situação na qual (19) é usada, uma muito boa precisão pode ser constatada mesmo para valores elevados de passo de adaptação.

Na Fig. 4, os resultados obtidos para o Exemplo 4 são apresentados. Nessa figura, verifica-se que os algoritmos LMS e NLMS exibem comportamentos bastante similares quando os valores de passo de adaptação são ajustados através de (24) [assintoticamente, (23) para filtros de alta ordem]. Portanto, para sinais de entrada não-correlacionados, mostra-se que a velocidade de convergência e o EQME em regime permanente desses dois algoritmos se tornam aproximadamente iguais quando (23) e (24) são utilizadas, respectivamente.

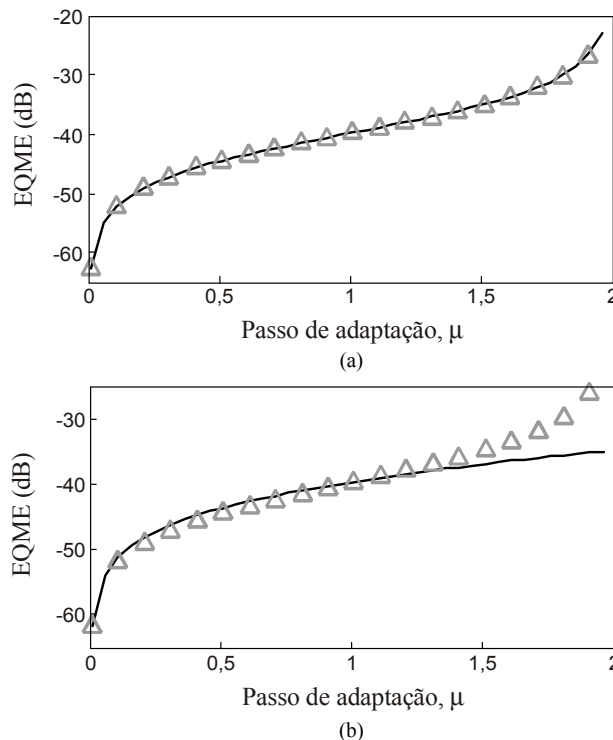


Fig. 1. Exemplo 1. EQME em regime permanente [dado por (14) e (19)]. (Triângulo cinza) simulação de MC. (Linha escura sólida) modelo proposto. (a)  $\chi=1$ . (b)  $\chi=593,08$ .

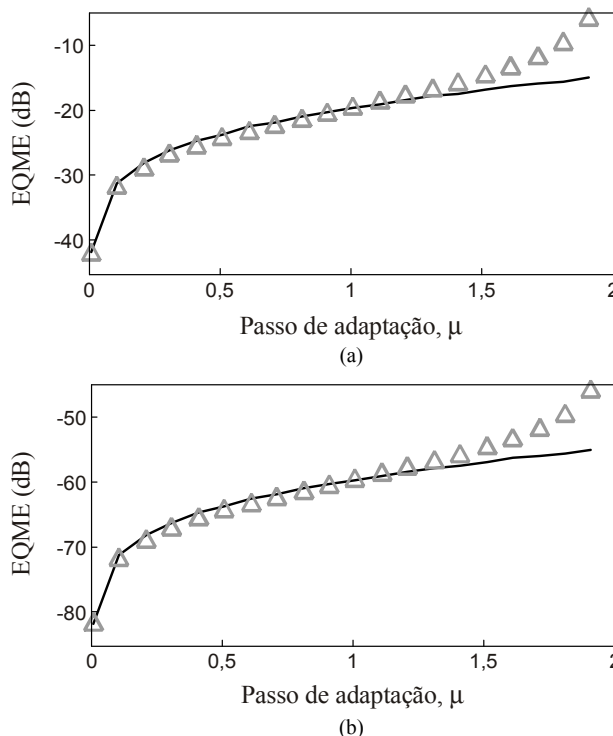


Fig. 2. Exemplo 2. EQME em regime permanente [dado por (19)]. (Triângulo cinza) simulação de MC. (Linha escura sólida) modelo proposto. (a) 20dB SNR. (b) 60dB SNR.

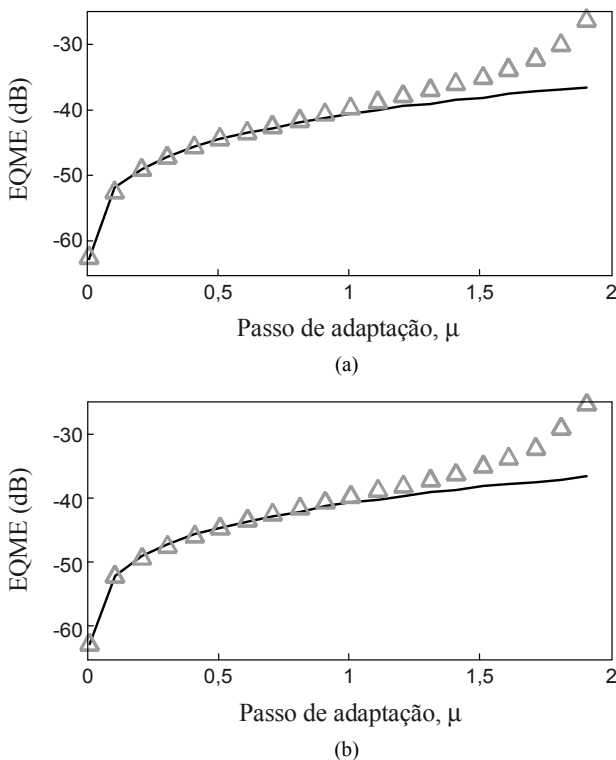


Fig. 3. Exemplo 3. EQME em regime permanente [dado por (19)]. (Triângulo cinza) simulação de MC. (Linha escura sólida) modelo proposto. (a)  $M = 8$ . (b)  $M = 256$ .

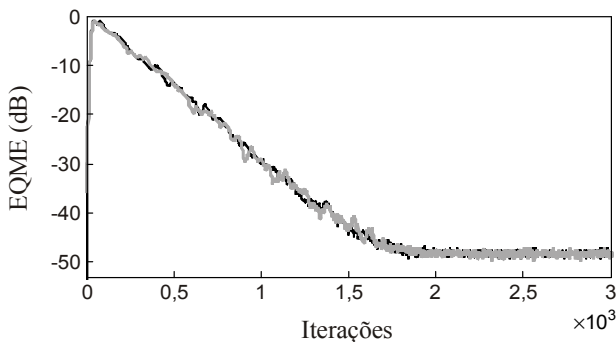


Fig. 4. Exemplo 4. Evolução do EQME dos algoritmos LMS (linha irregular escura) e NLMS (linha irregular cinza) considerando um mesmo valor de EQME em regime permanente.

## V. CONSIDERAÇÕES FINAIS

No presente trabalho de pesquisa, considerando sinais de entrada gaussianos, foram derivadas expressões de modelo que descrevem o comportamento do algoritmo NLMS em regime permanente. No caso de sinais de entrada correlacionados, a abordagem utilizada possibilita a obtenção de expressões analíticas aproximadas para o EQME em regime permanente e para o desajuste. No caso de sinais de entrada não-correlacionados, expressões analíticas ainda mais precisas são obtidas, visto que muito poucas aproximações são utilizadas. Além disso, foram determinadas expressões que permitem ajustar os algoritmos LMS e NLMS para uma mesma velocidade de convergência ou EQME em regime permanente. Os resultados de simulação apresentados, considerando diferentes condições de operação, atestam a precisão das expressões de modelo aqui propostas.

## REFERÊNCIAS

[1] S. Kaczmarz, "Angenäherte Auflösung von Systemen linearer Gleichungen," *Bull. Int. Acad. Polon. Sci. Lettres A*, vol. 35, no. III, pp. 355–357, 1937.

[2] J. I. Nagumo and A. Noda, "A learning method for system identification," *IEEE Trans. Autom. Control*, vol. 12, no. 3, pp. 282–287, Jun. 1967.

[3] A. E. Albert and L. A. Gardner Jr., *Stochastic Approximation and Nonlinear Regression*, 1st ed. Cambridge, MA: MIT Press, 1967.

[4] B. Farhang-Boroujeny, *Adaptive Filters: Theory and Applications*, 1st ed. Baffins Lane Chichester, U.K.: Wiley, 1999.

[5] S. Haykin, *Adaptive Filter Theory*, 4th ed. Upper Saddle River, NJ: Prentice-Hall, 2002.

[6] A. H. Sayed, *Adaptive Filters*. Hoboken, NJ: John Wiley & Sons, 2009.

[7] J. Homer, I. Mareels, and C. Hoang, "Enhanced detection-guided NLMS estimation of sparse FIR-modeled signal channels," *IEEE Trans. Circuits Syst. I, Reg. Papers*, vol. 53, no. 8, pp. 1783–1791, Aug. 2006.

[8] Z. Tang and G. Leus, "Low-complexity equalization of time-varying channels with precoding," *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 54, no. 9, pp. 3642–3648, Sept. 2006.

[9] J. Homer, P. J. Kootsookos, and V. Selvaraju, "Enhanced NLMS adaptive array via DOA detection," *IET Commun.*, vol. 1, no. 1, pp. 19–26, Feb. 2007.

[10] M. Yukawa, R. C. Lamare, and R. Sampaio-Neto, "Efficient acoustic echo cancellation with reduced-rank adaptive filtering based on selective decimation and adaptive interpolation," *IEEE Trans. Audio, Speech, Lang. Process.*, vol. 16, no. 4, pp. 696–710, May 2008.

[11] R. Vicen-Bueno, A. Martinez-Leira, R. Gil-Pita, and M. Rosa-Zurera, "Modified LMS-based feedback-reduction subsystems in digital hearing aids based on WOLA filter bank," *IEEE Trans. Instrum. Meas.*, vol. 58, no. 9, pp. 3177–3190, Sept. 2009.

[12] N. Yousefian and P. C. Loizou, "A dual-microphone algorithm that can cope with competing-talker scenarios," *IEEE Trans. Audio, Speech, Lang. Process.*, vol. 21, no. 1, pp. 145–155, Jan. 2013.

[13] S. Ahmed, M. T. Akhtar, and X. Zhang, "Robust auxiliary-noise-power scheduling in active noise control systems with online secondary path modeling," *IEEE Trans. Audio, Speech, Lang. Process.*, vol. 21, no. 4, pp. 749–761, Apr. 2013.

[14] M. Rupp, "The behavior of LMS and NLMS algorithms in the presence of spherically invariant processes," *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 41, no. 3, pp. 1149–1160, Mar. 1993.

[15] E. M. Lobato, O. J. Tobias, and R. Seara, "Stochastic modeling of the transform-domain  $\epsilon$ LMS algorithm," *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 56, no. 5, pp. 1840–1852, May 2008.

[16] J. E. Kolodziej, O. J. Tobias, and R. Seara, "Stochastic analysis of the transform domain LMS algorithm for a non-stationary environment," in *Proc. Eur. Signal Process. Conf. (EUSIPCO)*, Glasgow, U.K., Aug. 2009, pp. 1730–1734.

[17] M. S. E. Abadi and J. H. Husøy, "On the application of a unified adaptive filter theory in the performance prediction of adaptive filter algorithms," *Digit. Signal Process.*, vol. 19, no. 3, pp. 410–432, May 2009.

[18] J. E. Kolodziej, O. J. Tobias, and R. Seara, "An improved stochastic model of the NLMS algorithm for correlated input data," in *Proc. Eur. Signal Process. Conf. (EUSIPCO)*, Poznan, Poland, Sept. 2007, pp. 360–364.

[19] E. V. Kuhn, and R. Seara, "Modelo estocástico do algoritmo NLMS para sinais de entrada gaussianos complexos," in *Anais do XXX Simposio Brasileiro de Telecomunicações (SBRT)*, Brasília, DF, Set. 2012, pp. 1–5.

[20] N. J. Bershad, "Analysis of the normalized LMS algorithm with Gaussian inputs," *IEEE Trans. Acoust., Speech, Signal Process.*, vol. 34, no. 4, pp. 793–806, Aug. 1986.

[21] M. Tarrab and A. Feuer, "Convergence and performance analysis of the normalized LMS algorithm with uncorrelated Gaussian data," *IEEE Trans. Inf. Theory*, vol. 34, no. 4, pp. 680–691, Jul. 1988.

[22] D. T. M. Slock, "On the convergence behavior of the LMS and the normalized LMS algorithms," *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 41, no. 9, pp. 2811–2825, Sept. 1993.

[23] J. C. M. Bermudez and M. H. Costa, "A statistical analysis of the  $\epsilon$ -NLMS and NLMS algorithms for correlated Gaussian signals," *J. Commun. Inform. Syst.*, vol. 20, no. 2, pp. 7–13, Aug. 2005.

[24] T. Y. Al-Naffouri and M. Moinuddin, "Exact performance analysis of the  $\epsilon$ -NLMS algorithm for colored circular Gaussian inputs," *IEEE Trans. Signal Process.*, vol. 58, no. 10, pp. 5080–5090, Oct. 2010.

[25] D. S. Bernstein, *Matrix Mathematics: Theory, Facts, and Formulas*, 2nd ed. Woodstock, OX: Princeton University Press, 2009.

[26] M. H. Costa and J. C. M. Bermudez, "An improved model for the normalized LMS algorithm with Gaussian inputs and large number of coefficients," in *Proc. IEEE Int. Conf. Acoust., Speech, Signal Process. (ICASSP)*, Orlando, FL, May 2002, vol. 2, pp. 1385–1388.

[27] C. W. Therrien, *Discrete Random Signals and Statistical Signal Processing*, 1st ed. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1992.