

# Uma Aproximação Ortogonal para a DCT

R. S. OLIVEIRA R. J. CINTRA F. M. BAYER C. J. TABLADA

**Resumo**—O presente trabalho introduz uma nova aproximação ortogonal para a transformada discreta do cosseno de comprimento 8 baseada no trabalho de Brahimi-Bouguezel. O algoritmo rápido para a matriz de transformação proposta requer apenas 16 adições. No contexto de compressão de imagens, a transformação proposta supera várias aproximações arquivadas na literatura em termos de qualidade da imagem medida pelo erro quadrático médio.

**Palavras-Chave**—DCT, algoritmos rápidos, compressão de imagens.

**Abstract**—This paper introduces an orthogonal 8-point approximation for the discrete cosine transform, based on the transformation matrix derived by Brahimi-Bouguezel. A fast algorithm for the proposed approximation is suggested and requires only 16 additions. In the context of image compression, the proposed approximation outperforms several methods archived in literature, when compressed images are assessed according to the mean square error.

**Keywords**—discrete cosine transform, fast algorithms, image compression.

## I. INTRODUÇÃO

A crescente demanda por aplicações de processamento de imagem e vídeo requer técnicas eficientes de codificação [1]. Nesse contexto, as transformadas trigonométricas desempenham importante papel. Em particular, a transformada discreta do cosseno (DCT), que, por suas boas propriedades de des-correlação e compactação de energia, é aplicada em vários padrões de compressão, como JPEG [2] e MPEG [3].

Entretanto, a DCT exige operações de multiplicação por números transcendentais. Frequentemente, isto implica no uso de aritmética de ponto flutuante e em maiores estruturas de circuitos e *hardware* [4]. Uma alternativa a este cenário é a utilização de aproximações matriciais para a DCT.

Em [4], num trabalho seminal, Haweel introduz a *signed* DCT (SDCT) [4], que é uma aproximação sem multiplicações para a DCT. Nos últimos anos, outras transformadas foram propostas, tais como a aproximação de Bouguezel-Ahmad-Swamy (BAS) [5], a DCT arredondada (RDCT) [6] e a aproximação de Brahimi-Bouguezel [7]. Tais aproximações têm complexidade computacional muito baixa, o que resulta em implementações de grande eficiência energética e alto desempenho. Vários padrões de codificação de imagem/vídeo utilizam transformadas aproximadas. Um exemplo notório é o recente padrão de compressão de vídeo HEVC [8].

R. S. Oliveira, Grupo de Processamento de Sinais, Programa de Graduação em Estatística, Universidade Federal de Pernambuco (UFPE). R. J. Cintra, Grupo de Processamento de Sinais, Departamento de Estatística, Programa de Pós-graduação em Eng. Elétrica e Estatística, UFPE, E-mail: rjdesc@ieee.org. F. M. Bayer, Departamento de Estatística, Laboratório de Ciências Espaciais de Santa Maria, Universidade Federal de Santa Maria. C. J. Tablada, Grupo de Processamento de Sinais, Programa de Pós-graduação em Estatística, UFPE.

TABELA I  
APROXIMAÇÕES PARA A DCT DE COMPRIMENTO 8

Método	Matriz de transformação	Ortogonalizável?
SDCT [4]	$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$	Não
BAS [5]	$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$	Sim
RDCT [6]	$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$	Sim

Neste artigo, temos as seguintes contribuições: (i) a proposição de uma nova aproximação ortogonal para a DCT baseada em [7]; (ii) um algoritmo rápido baseado em fatoração matricial para a aproximação proposta, exigindo apenas 16 adições; e (iii) uma análise quantitativa comparando a aproximação proposta com aproximações em estado-da-arte.

## II. APROXIMAÇÕES PARA A DCT

Essencialmente, as aproximações para a DCT são matrizes ausentes de elementos multiplicadores. Algumas aproximações são ortogonais, como os métodos descritos em [5] e [6], ao passo que outras são não-ortogonais, como a pioneira SDCT [4]. A Tabela I detalha estes métodos aproximados.

## III. CORREÇÃO E NOVA APROXIMAÇÃO

### A. Matriz de Brahimi-Bouguezel

Em [7], Brahimi-Bouguezel introduzem a seguinte aproximação para a DCT:

$$\mathbf{T}_0 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

A matriz  $\mathbf{T}_0$  não possui linhas ortogonais. Assim, não é possível satisfazer:  $\mathbf{T}_0 \cdot \mathbf{T}_0^\top = [\text{matriz diagonal}]$ , em que o sobrescrito  $^\top$  denota transposição matricial. A condição de ortogonalidade é desejável, pois, como  $\mathbf{T}^{-1} = \mathbf{T}^\top$ , um algoritmo rápido para  $\mathbf{T}$  é facilmente convertido em um para  $\mathbf{T}^{-1}$  [6], [8].

TABELA II  
COMPLEXIDADE COMPUTACIONAL

Método	Adições	Multiplicações	Deslocamentos
DCT exata [7]	29	5	0
SDCT [4]	24	0	0
RDCT [6]	22	0	0
BAS [5]	18	0	0
Proposta	16	0	0

### B. Nova transformação ortogonal

É possível tornar  $\mathbf{T}_0$  ortogonalizável através de uma judiciosa alteração em seus elementos. Substituindo os elementos unitários nas posições (4,4) e (4,5) de  $\mathbf{T}_0$  por elementos nulos, obtemos a seguinte aproximação para a DCT:

$$\mathbf{T}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (1)$$

As linhas ou colunas da matriz  $\mathbf{T}_1$  formam um conjunto de vetores ortogonais. Esta transformação é livre de multiplicações e—calculada diretamente—requer apenas 28 adições.

### C. Algoritmo rápido

Sejam  $\mathbf{I}_n$  e  $\bar{\mathbf{I}}_n$  as matrizes identidade e contra-identidade de dimensão  $n$ , respectivamente. Usando as técnicas descritas em [6], obtemos o seguinte algoritmo rápido para  $\mathbf{T}$ :

$$\mathbf{T}_1 = \mathbf{P} \cdot \mathbf{A}_3 \cdot \mathbf{A}_2 \cdot \mathbf{A}_1$$

em que:

$$\mathbf{A}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_4 & \bar{\mathbf{I}}_4 \\ \bar{\mathbf{I}}_4 & -\mathbf{I}_4 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_2 = \text{diag} \left( \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & -1 & & \\ & & 1 & \\ & & & -1 \end{bmatrix}, \mathbf{I}_2, \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \right),$$

$$\text{e } \mathbf{A}_3 = \text{diag} \left( \begin{bmatrix} 1 & \\ & -1 \end{bmatrix}, 1, -1, \mathbf{I}_4 \right).$$

A matriz  $\mathbf{P}$  realiza a seguinte permutação (1)(2 8 5)(3 4 6 7) em notação cíclica [9].

O algoritmo rápido acima descrito requer apenas 16 adições, A Tabela II lista a complexidade computacional dos métodos discutidos neste trabalho.

## IV. SIMULAÇÃO E RESULTADOS

Consideramos uma simulação computacional empregando: (i) 30 imagens padronizadas [10], (ii) um algoritmo de compressão similar ao JPEG [4], [5], [7] e (iii) o erro quadrático médio (MSE), como figura de mérito da qualidade de imagens após compressão.

A Figura 1 exibe a média dos valores calculados do MSE entre as imagens consideradas para vários valores de coeficientes retidos. Os valores do MSE para  $\mathbf{T}_0$  não foram incluídos por serem muito maiores do que os valores mostrados na Figura 1. A transformada proposta supera a SDCT e tem desempenho similar à aproximação BAS, exigindo menos operações aritméticas. A RDCT tem desempenho um pouco melhor, mas é 37.5% mais computacionalmente complexa que a transformação proposta.

A Figura 2 mostra a imagem Elaine [10] original e após compressão sob as aproximações consideradas. O número de coeficientes retidos foi fixado em 28.

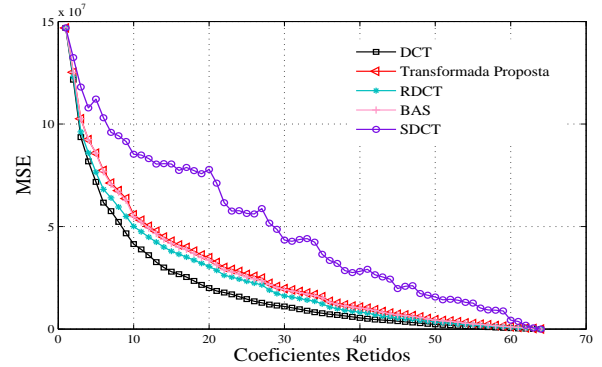


Fig. 1. Curvas para a média do MSE correspondentes à 30 imagens.

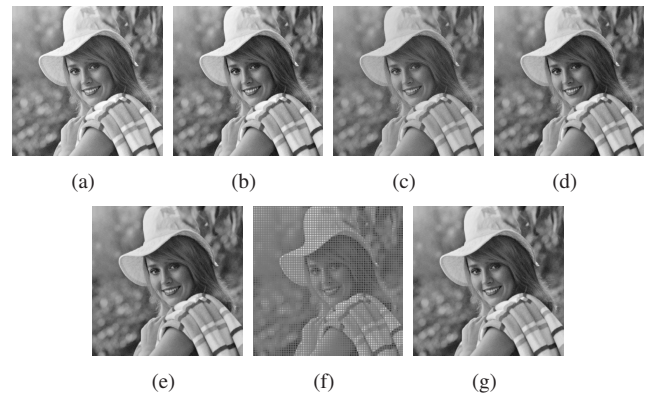


Fig. 2. Imagem Elaine: (a) imagem original; (b) DCT; (c) SDCT; (d) RDCT; (e) BAS; (f)  $\mathbf{T}_0$ ; (g) aproximação proposta.

## V. CONCLUSÕES

Neste trabalho, propomos uma nova aproximação para a DCT baseada em [7] cuja complexidade computacional é de apenas 16 adições. A nova transformação tem desempenho similar à aproximação BAS [5], exigindo 11% menos operações.

## REFERÊNCIAS

- [1] Y. S. Park and H. W. Park, "Design and analysis of an image resizing filter in the block-DCT domain," *IEEE Trans. Circuits Syst. Video Technol.*, vol. 14, pp. 274–279, 2004.
- [2] G. K. Wallace, "The JPEG still picture compression standard," *IEEE Trans. Consum. Electron.*, vol. 38, pp. xviii–xxxiv, 1992.
- [3] A. Puri, "Video coding using the H.264/MPEG-4 AVC compression standard," *Signal Processing: Image Communication*, vol. 19, 2004.
- [4] T. I. Haweel, "A new square wave transform based on the DCT," *Signal Processing*, vol. 81, pp. 2309–2319, 2001.
- [5] S. Bouguezel, M. O. Ahmad, and M. Swamy, "A fast 8x8 transform for image compression," in *Int'l Conference on Microelectronics, ICM*, 2009, pp. 74–77.
- [6] F. M. Bayer and R. J. Cintra, "Image compression via a fast DCT approximation," *IEEE Lat. Am. Trans.*, vol. 8, no. 6, pp. 708–713, 2010.
- [7] N. Brahimi and S. Bouguezel, "An efficient fast integer DCT transform for images compression with 16 additions only," in *Int'l Workshop on Systems, Signal Processing and their Applications*, 2011, pp. 71–74.
- [8] G. J. Sullivan, J. Ohm, W. Han, and T. Wiegand, "Overview of the high efficiency video coding (HEVC) standard," *IEEE Trans. Circuits Syst. Video Technol.*, vol. 22, pp. 1649–1668, 2012.
- [9] I. N. Herstein, *Topics in Algebra*, 2nd ed. John Wiley & Sons, 1975.
- [10] USC-SIPI Image Database. University of Southern California. [Online]. Available: <http://sipi.usc.edu/database/>