

Técnica de Localização de Objetos Enterrados Baseada em Métodos LS não lineares

Artur Araújo Rodrigues, André Noll Barreto, Adoniran Judson Braga e Leonardo Aguayo

Resumo— Otimização utilizando mínimos quadrados é um dos métodos utilizados para resolver o problema de localização em redes sem fio. Com suas inúmeras variações, esses algoritmos baseados na abordagem do método do gradiente geralmente utilizam modelos de canal de comunicações típicos de cada aplicação e cenário. Este artigo explora o uso dessas técnicas quando aplicadas à localização em três dimensões de objetos enterrados, por meio de transmissão por indução magnética, também conhecida como comunicação através da terra (TTE). Para tal, o desempenho de um modelo de canal TTE é avaliado.

Palavras-Chave— Técnica de localização, Otimização por mínimos quadrados, Comunicações *Through-the-Earth*.

Abstract— Least Squares optimization is one of the methods utilized to solve the problem of nodes localization in wireless networks. Within its numerous variations, these algorithms based on the gradient approach generally use channel models typical of the particular scenario for each application. This paper explores the use of these techniques when applied to the localization of buried objects, by means of signal transmission using magnetic induction, also known as through-the-earth (TTE) communications. For this purpose, the performance of a TTE channel model is evaluated.

Keywords— Localization Technique, Least Squares Optimization, Through-the-Earth Communications.

I. INTRODUÇÃO

Nos últimos anos, a procura por alternativas de sistemas sem fio para a mineração industrial vem gerando pesquisas importantes no ramo das comunicações subterrâneas [1]. A possibilidade de utilizar solo e rochas como meios de transmissão abriu espaço para o desenvolvimento de técnicas que reduzem a necessidade de uma infraestrutura fixa e permitem que enlaces entre a superfície e as minas subterrâneas sejam arquitetados mais facilmente. Tais sistemas, chamados de sistemas de comunicação através da terra ou sistemas TTE (*Through-the-Earth*) [2], estão sendo considerados como alternativas viáveis para o desenvolvimento de diversas aplicações, não só na indústria de mineração, dentre as quais podemos citar operações de resgate em casos de soterramentos e avalanches, assim como na comunicação com equipamentos de infraestrutura subterrânea, como tubulações de água e gás. Em muitas destas aplicações se faz necessária também a localização de sensores e equipamentos, usualmente com informações em três dimensões.

Artur Araújo Rodrigues (artur.rodrigues@ieee.org), Adoniran Judson Braga (jbraga@ene.unb.br), Departamento de Engenharia Elétrica, Universidade de Brasília, Brasília-DF; André Noll Barreto (andre.nollbarreto@barkhauseninstitut.org), Barkhausen Institut, Dresden, Alemanha; Leonardo Aguayo (aguayo@unb.br), Faculdade do Gama, UnB, Brasília-DF. Trabalho financiado pelo Instituto Tecnológico Vale (ITV).

Uma vez que o sistema de posicionamento global (GPS, *Global Positioning System*) é inefetivo em ambientes subterrâneos, a necessidade por conhecer e medir posições trouxe a procura por outras possibilidades. Diversos sistemas de localização se baseiam no princípio da trilateração e triangulação [3], em que são dispostos alguns poucos nós de referência que possuem conhecimento *a priori* de sua posição. Esses tipos de nós são comumente denominados nós âncora [4]. A partir da estimativa da distância e/ou ângulo entre cada um dos nós âncoras e o nó cuja posição é desconhecida, podemos então estimar a posição deste último.

A maioria das técnicas de localização utiliza métricas de distância e direção em conjunto com algoritmos matemáticos para localizar cada nó da forma mais precisa possível. Porém, tipicamente, não é possível se medir a distância e o ângulo diretamente, mas apenas estimá-la a partir de uma outra medida, cuja característica varia entre os diferentes cenários e aplicações. Indicadores comuns para essas medidas são a potência do sinal recebido (RSS, do inglês *Received Signal Strength*), o tempo de chegada (TOA, *Time of Arrival*), a diferença no tempo de chegada (TDOA, *Time Difference of Arrival*) e o ângulo de chegada (AOA, *Angle of Arrival*). Em [5], encontra-se um conjunto das principais técnicas empregadas em redes de sensores sem fio.

Embora seja possível encontrar diversos resultados sobre a aplicação de técnicas de localização em redes de sensores, a efetividade desses métodos em ambientes com características TTE ainda precisa ser explorada. Procurar por técnicas que sejam eficientes e precisas em cenários TTE é a principal motivação deste estudo. Em particular, as baixas frequências utilizadas e as distâncias relativamente curtas tornam a medição do tempo de chegada inviável, e devemos nos basear apenas na RSS e na perda de potência em cada percurso. Neste artigo, é proposto um sistema baseado em RSS, que utiliza métodos de otimização por mínimos quadrados (métodos *Least Squares* ou LS) para estimar a localização de sensores. Este modelo é analisado por meio de simulação para a formulação direta do canal TTE e para uma aproximação mais simplificada.

Na Seção II, um modelo de canal TTE é apresentado juntamente à métrica RSS utilizada na técnica de localização. Métodos para a localização vistos como um problema de otimização por mínimos quadrados não linear são discutidos na Seção III. A Seção IV traz resultados de simulação em diferentes cenários para avaliação e comparação de desempenho dos algoritmos propostos. Finalmente, algumas observações são feitas na Seção V.

II. MODELO DE SISTEMA TTE

A. Modelo de Canal TTE

Sistemas de comunicações TTE possuem propriedades que se diferenciam de forma significativa daquelas encontradas em sistemas sem fio que utilizam radiofrequência (RF). Devido à condutividade elétrica não desprezível do meio (composto de rochas, solo, água, minérios e outros materiais) [6], a propagação do sinal é profundamente atenuada para frequências altas. Por esse motivo, frequências mais baixas são utilizadas, tipicamente abaixo de 30 kHz. Na operação nesse tipo de banda limitada, modos de transmissão são baseados quase unicamente em indução magnética, utilizando-se comumente antenas *loop* na superfície e no subsolo para estabelecer o enlace físico.

Para frequências abaixo dos 100 kHz, a modelagem do canal de propagação pode ser feita com base na impedância de transferência entre os *loops*. O modelo TTE utilizado ao longo deste texto é construído considerando um meio infinito condutivo (MIC), descrito em detalhes em [7]. Considerando-se $T = r\sqrt{\mu\sigma\omega}/2$ a frequência espacial normalizada para um dado alcance r , função da frequência angular ω em um meio com condutividade elétrica σ e permeabilidade μ , a impedância de transferência $Z(T)$ é dada por:

$$Z(T) = N_{tx}N_{rx}S_{tx}S_{rx} \left[\sqrt{G_r^{tx}G_r^{rx}} \mathbf{F}_r + \sqrt{G_\theta^{tx}G_\theta^{rx}} \mathbf{F}_\theta \right]. \quad (1)$$

Aqui, N_{tx} , S_{tx} e N_{rx} , S_{rx} são o número de voltas e área dos *loops* de transmissão e recepção, respectivamente. Os ganhos normalizados para as antenas de transmissão e recepção nas direções dos vetores \hat{r} e $\hat{\theta}$ são, por sua vez, $G_r^{tx} = \cos^2(\theta)$, $G_r^{rx} = \cos^2(\theta - \theta_x)\cos^2(\theta_y)$, $G_\theta^{tx} = \sin^2(\theta)$ e $G_\theta^{rx} = \sin^2(\theta - \theta_x)\cos^2(\theta_y)$.

A Figura 1 ilustra a geometria para \hat{r} e $\hat{\theta}$, onde θ_x e θ_y são ângulos de rotação para os eixos auxiliares x' e y' , criados pela rotação do eixo z por um ângulo ϕ , o ângulo de azimute.

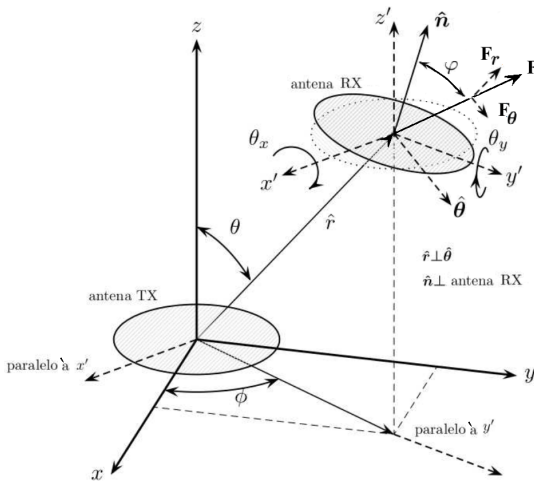


Fig. 1. Geometria para \hat{r} e $\hat{\theta}$ para duas antenas *loop* circulares. O ângulo ϕ é resultado das rotações nos eixos x' e y' .

Ainda, \mathbf{F}_r e \mathbf{F}_θ são as funções de transferência para o canal, dadas, respectivamente, por:

$$\mathbf{F}_r = \frac{T^2\sqrt{1+2T+2T^2}}{\pi\sigma r^5} e^T e^{j\left\{\tan^{-1}\left(\frac{T}{1+T}\right)-T-\frac{\pi}{2}\right\}} \quad (2)$$

e

$$\mathbf{F}_\theta = \frac{T^2\sqrt{(1+T)^2+(T+2T^2)^2}}{2\pi\sigma r^5} e^T e^{j\left\{\tan^{-1}\left(\frac{T+2T^2}{1+T}\right)-T+\frac{\pi}{2}\right\}}. \quad (3)$$

Mais detalhes sobre a modelagem deste canal, assim como outras formulações para o TTE podem ser encontradas em [7].

B. Modelo de Perda de Potência

Para se obterem as medidas RSS utilizadas na simulação e no desenvolvimento dos algoritmos de localização, a descrição matemática do canal precisa ser melhor desenvolvida. Do modelo apresentado anteriormente, é possível derivar uma relação entre a potência radiada no *loop* de transmissão e a potência entregue ao *loop* de recepção. Esta relação é dada por:

$$\frac{P_{rx}}{P_{tx}} = \frac{|Z(T)|^2}{R_{tx}R_{rx}}, \quad (4)$$

com R_{tx} e R_{rx} , as resistências dos *loops* transmissor e receptor, respectivamente. De (4), utilizando-se (1), temos:

$$\sqrt{P_{rx}} = \sqrt{P_{tx}} \Phi_{tx} \Phi_{rx} \left| \sqrt{G_r^{tx}G_r^{rx}} \mathbf{F}_r + \sqrt{G_\theta^{tx}G_\theta^{rx}} \mathbf{F}_\theta \right|, \quad (5)$$

em que Φ_{tx} e Φ_{rx} são as aberturas específicas das antenas de transmissão e recepção, respectivamente. Como descrito em [7], a abertura específica de uma antena *loop* é função do seu raio a , massa M , densidade de massa ρ_l , e condutividade do fio σ_l , na forma $\Phi = 0,5\alpha\sqrt{M\sigma_l/\rho_l}$.

Ainda, para inferir a distância entre o transmissor (i.e., um sensor ativo) e o receptor (i.e., uma âncora), a formulação em (5) pode ser reescrita. Uma descrição mais direta da relação entre a medida RSS e a distância é obtida pela medida de atenuação do sinal, ou perda de potência. O modelo para essa representação é:

$$PL(r, \theta_x, \theta_y) = -20 \log_{10}(\Phi |G_r \mathbf{F}_r + G_\theta \mathbf{F}_\theta|) + \chi. \quad (6)$$

Em (6), $PL(r, \theta_x, \theta_y)$ é a medida de perda de potência em dB a uma distância r , para ângulos θ_x e θ_y , $G_r = \sqrt{G_r^{tx}G_r^{rx}}$, $G_\theta = \sqrt{G_\theta^{tx}G_\theta^{rx}}$ e $\Phi = \Phi_{tx}\Phi_{rx}$, como descrito em (5). χ é uma variável aleatória de distribuição gaussiana $\mathcal{N}(0, s^2)$, representando o erro na medida da perda de potência, com desvio padrão s . Desta forma, leva-se em conta tanto o ruído de medição, como o fato de que o canal é diferente daquele previsto pelo modelo, por exemplo devido a irregularidades no meio físico.

Uma vez que r e θ podem ser obtidos diretamente a partir das coordenadas cartesianas dos sensores e das âncoras [8], (6) pode também ser vista como função de $[x, y, z, \theta_x, \theta_y]$, em que x, y, z são as coordenadas a serem descobertas. A Seção III deduzirá um método para se estimarem os valores que melhor se ajustam ao modelo de perda de potência proposto para um dado conjunto de medidas RSS.

III. OTIMIZAÇÃO E ALGORITMOS DE LOCALIZAÇÃO

O problema de se estimar uma localização a partir de medidas de distância pode ser visto como um problema de otimização [9]. Nesse tipo de problema, um número finito de parâmetros, i.e. as coordenadas das posições desconhecidas,

é estimado a partir do melhor ajuste de um conjunto de dados de um certo modelo. Em termos matemáticos, esse procedimento envolve geralmente encontrar um mínimo local para a chamada função objetivo. Quando a função objetivo $H(\alpha)$ é a soma dos quadrados de funções não lineares [10], o problema de otimização é também chamado de problema de mínimos quadrados (LS) não linear.

Em termos práticos, queremos minimizar a soma dos erros quadráticos $h(\alpha)$ de cada relação sensor-âncora, também denominados resíduos. Queremos encontrar α^* para um sensor de forma que:

$$\alpha^* = \arg \min_{\alpha} H(\alpha) = \arg \min_{\alpha} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m (h_i(\alpha))^2. \quad (7)$$

Pelo modelo obtido na Seção II, $\alpha = [x, y, z, \theta_x, \theta_y]$ e $h_i(\alpha) = PL_i - PL_i^{det}(\alpha)$, em que PL_i^{det} é a de perda de potência esperada para a âncora i , sendo m o número de âncoras.

Métodos LS não-lineares são, em sua grande maioria, iterativos [11]. A ideia básica é aproximar um modelo não-linear por um modelo linear na vizinhança de α^* e então refinar as estimativas de forma iterativa. Existem diversos algoritmos para a solução de problemas LS desse tipo [12], sendo a maioria criada como uma forma mais eficiente do método de Gauss-Newton (GN). Nestes algoritmos, a abordagem do gradiente [13], base utilizada em GN, alcança uma melhor convergência e, portanto, melhores resultados. O método GN será examinado aqui com mais detalhes.

Observando-se a função objetivo, para a minimização dos resíduos, o vetor α^* é aquele em que

$$\nabla H(\alpha^*) = \left[\frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial H}{\partial y} \frac{\partial H}{\partial z} \frac{\partial H}{\partial \theta_x} \frac{\partial H}{\partial \theta_y} \right]^T = \mathbf{0}. \quad (8)$$

As raízes de (8) podem ser encontradas através da solução do sistema de equações das derivadas parciais, o que pode ser realizado iterativamente. Assim, começando de uma estimativa inicial $\alpha^{(0)}$, o método GN pode ser expressado por:

$$\alpha^{(k+1)} = \alpha^{(k)} + (\mathbf{J}^T \mathbf{J})^{-1} \mathbf{J}^T \mathbf{h}(\alpha^{(k)}), \quad (9)$$

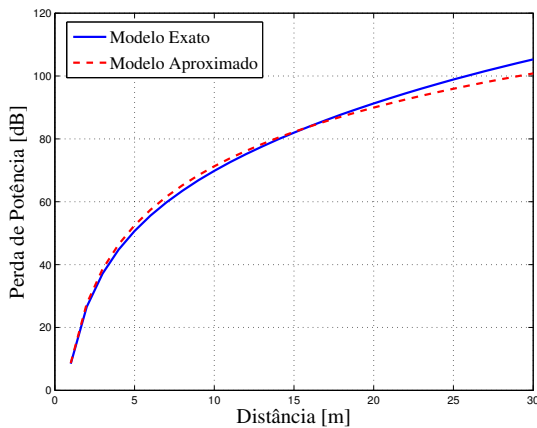


Fig. 2. Comparativo entre TTE e o modelo aproximado para a perda de potência para uma dada variação na distância.

onde, para os vetores coluna α e \mathbf{h} , \mathbf{J} é o Jacobiano com entradas

$$J(\alpha)_{ij} = \frac{\partial h_i(\alpha^{(k)})}{\partial \alpha_j}. \quad (10)$$

O cálculo do Jacobiano é essencial. Se as colunas de \mathbf{J} são linearmente independentes, i.e. a matriz tem posto completo, então a função objetivo $H(\alpha)$ possui um minimizador que é único [14]. No entanto, este nem sempre é o caso, e encontrar um mínimo global pode ser bem difícil. Aqui, pressupõe-se que a função vetor \mathbf{h} é diferenciável e o Jacobiano existe. Para o modelo TTE apresentado, encontrar uma formulação fechada com derivadas diretas para os elementos em \mathbf{J} é bastante complexo, e, por consequência, não muito prático.

Segundo a manipulação do modelo de perda de potência da Seção II, (6) pode ser reescrita como:

$$PL = -20 \log_{10} \left(\Phi \sqrt{u^2 G_r^2 + 2uv \cos(\eta - \lambda) G_r G_\theta + v^2 G_\theta^2} \right). \quad (11)$$

Em (11), as funções de transferência F_r e F_θ são representadas como valores complexos em suas formas polares. Aqui, u e v são os valores absolutos e η e λ são as fases, respectivamente para F_r e F_θ como dados em (2) e (3). Na simulação em estudo, u , v , η e λ são representados em sua forma polinomial para que a derivação de \mathbf{J} possa ser abordada mais facilmente.

Embora o método GN possa ser aplicado para (11), sua solução ainda é computacionalmente custosa e trabalhosa quando derivada em uma forma matemática fechada. Para simplificar o cálculo e aprimorar a eficiência do método, uma reparametrização do modelo foi desenvolvida como aproximação. O modelo aproximado é dado por:

$$PL_{aprox} = -20 \log_{10} \left(\Phi \sqrt{A^2 G_r^2 + 2ABCG_r G_\theta + B^2 G_\theta^2} \right), \quad (12)$$

no qual, $A = a_1 r^{-a_2}$, $B = b_1 r^{-b_2}$ e $C = c_1 \log_{10}(r + c_2)$. a_1 , a_2 , b_1 , b_2 , h_1 e h_2 são parâmetros derivados do modelo de canal e estimados pelo algoritmo juntamente às coordenadas. As Figuras 2 e 3 mostram um comparativo do comportamento

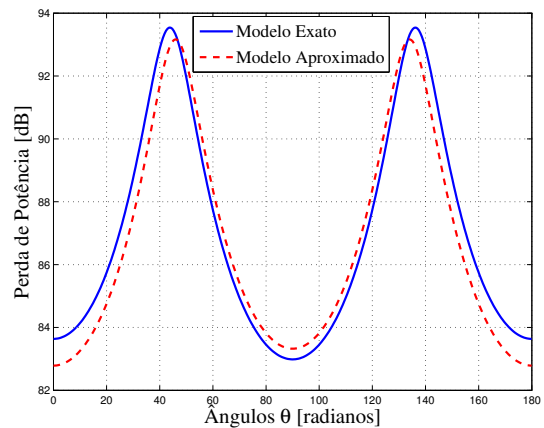


Fig. 3. Comparativo entre TTE e o modelo aproximado para a perda de potência para um dado ângulo θ .

da perda de potência relativa aos modelos em (11) e (12) para valores convenientes dos parâmetros. Como pode ser visto, a curva do modelo aproximado segue a curva TTE para uma grande gama de distâncias e ângulos.

O desempenho dos modelos propostos é avaliado em detalhes na Seção IV. O modelo exato, em particular, é explorado também usando uma abordagem numérica do Jacobiano. Para uma melhor convergência e acurácia, uma versão aprimorada do método de Gauss-Newton é utilizada nas simulações: o método de Levenberg-Marquadt (LM) [15]. Amplamente reconhecido como a versão modificada de GN mais robusta, LM utiliza um fator de amortecimento para controlar de forma mais precisa a direção e o tamanho do passo em cada iteração do algoritmo. Para utilizar diferenciação numérica do modelo, uma versão de LM que utiliza o método da secante também é testada. O algoritmo como foi implementado aqui pode ser encontrado em [16].

Na próxima seção, resultados de simulação para os métodos propostos são apresentados.

IV. RESULTADOS DE SIMULAÇÃO

Para o cenário de simulação, 30 sensores são posicionados aleatoriamente com uma distribuição uniforme dentro de um volume delimitado. As m âncoras são então posicionadas espaçadas sobre a superfície do volume, de forma que cada sensor possa se comunicar com todas as âncoras. Para cada posição desconhecida, o algoritmo é executado e um erro de localização é obtido, utilizando como métrica a raiz do erro quadrático médio (em inglês RMSE, *Root Mean Squared Error*). Neste caso, o erro de localização se refere à distância entre a posição estimada e a posição real de cada sensor. Como será visto, o algoritmo é sensível em relação à estimativa inicial.

Em cada ciclo de simulação, 100 ensaios são realizados com topologias geradas aleatoriamente. A área de distribuição é construída como uma região semi-hemisférica, com centro em $(0,0)$ e raio de 30 m. As medidas RSS são geradas usando o modelo dado em (6) e o desempenho comparativo é apresentado para os modelos exato e aproximado que foram derivados na Seção III.

A. Desempenho para diferentes números de âncoras

Primeiramente, avalia-se o desempenho do algoritmo para um número crescente de âncoras. Em cada iteração, o desvio padrão s da medida de perda de potência é ajustado em 20 dB e a posição real do sensor é escolhida aleatoriamente dentro de um círculo de raio $d = 10$ m em torno da estimativa inicial. O número de âncoras varia de 10 a 100, sendo espaçadas de forma equidistante. Em termos práticos, supondo que o cenário é invariante no tempo, pode-se chegar a um número grande de âncoras utilizando-se uma única antena móvel, e variando sua posição em cada instante. A Figura 4 mostra o desempenho comparativo dos modelos propostos.

Como mostrado, o erro de localização diminui substancialmente para um aumento no número de nós âncora. O modelo aproximado exibe um comportamento muito similar ao das curvas do modelo exato, com o erro distanciando menos de 1m na pior estimativa.

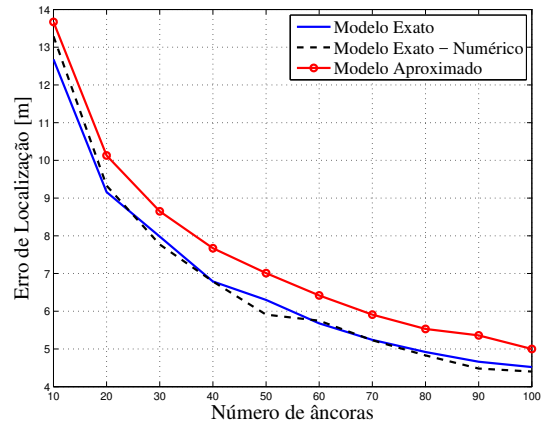


Fig. 4. Desempenho comparativo dos modelos TTE exato e aproximado para um aumento no número de nós âncora.

B. Efeito do erro na medição do RSS

Erros de medição estão intrinsicamente presentes nos valores RSS e, portanto, sua influência precisa ser considerada. A Figura 5 sumariza os resultados para os diferentes modelos quando o desvio padrão da perda de potência para uma determinada distância $d = 10$ m varia de 0 dB a 50 dB. Aqui, 50 posições diferentes das âncoras são consideradas. O erro de localização aumenta com o erro de medida. A influência do erro nas medidas RSS é muito significativa, chegando a superar o erro inicial estabelecido pela distância d . Ainda assim, para pequenos valores, o algoritmo alcança bons resultados na estimativa. Comparativamente, o modelo exato apresenta quase a mesma resposta tanto para o obtido diretamente pelo algoritmo LM como para o que utiliza o método da secante. Novamente, o modelo aproximado apresenta desempenho muito próximo ao do modelo exato.

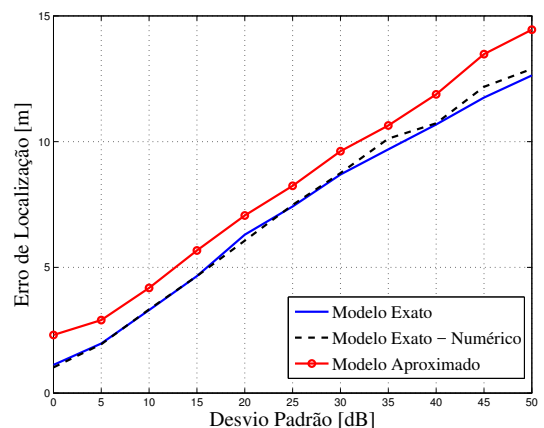


Fig. 5. Desempenho comparativo dos modelos TTE exato e aproximado para um aumento no desvio padrão da medida RSS.

C. Desempenho para diferentes estimativas iniciais

Para a avaliação dos efeitos da baixa acurácia na predição da estimativa inicial, foi realizada uma simulação para valores

crecentes da extensão do erro dessa suposição. A posição real é escolhida aleatoriamente dentro de um círculo com raio d , que varia de 0 m a 20 m em torno da estimativa inicial.

A Figura 6 apresenta os resultados comparativos para os modelos considerados, com 50 âncoras espaçadas uniformemente na superfície e desvio padrão da perda de potência de 20 dB. É possível notar que um aumento no erro na estimativa inicial não tem influência significativa no desempenho do algoritmo. No entanto, uma estimativa minimamente relacionada com a posição real é importante para o processo de otimização. Posições iniciais aleatórias alcançam mínimos locais muito distantes das posições reais. A Figura 7 apresenta um cenário onde o desempenho dos modelos para pontos gerados aleatoriamente é comparado com aquele apresentado na Figura 4 para $d = 10$ m. Como mostrado, o algoritmo não apresenta um desempenho satisfatório nessas condições, o que está de acordo com as características esperadas da aplicação do método GN para uma estimativa inicial pouco correlacionada.

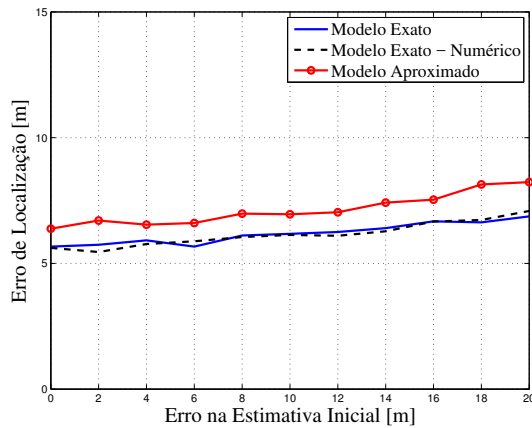


Fig. 6. Desempenho comparativo dos modelos TTE exato e aproximado para um aumento no erro máximo da estimativa inicial.

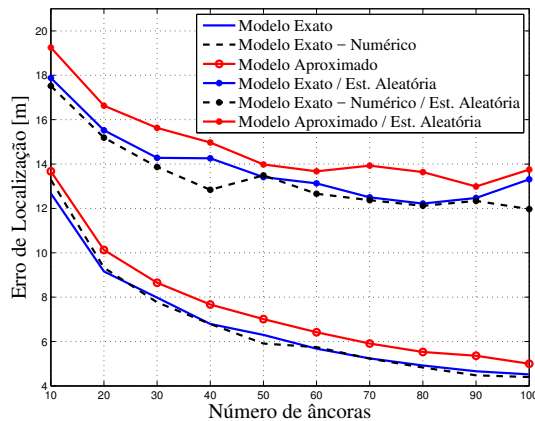


Fig. 7. Desempenho para estimativas iniciais geradas aleatoriamente no comparativo com estimativas geradas para $d = 10$ m.

V. CONCLUSÕES

Neste artigo foi apresentada uma abordagem utilizando um método de mínimos quadrados não-linear para a localização

de sensores enterrados, por meio de comunicação TTE. O algoritmo usa as medidas RSS de um canal baseado em transmissão por indução magnética e estima as coordenadas de sensores por meio de formulações de modelos exato e aproximado da perda de potência.

Resultados de simulação mostram que técnicas tradicionais utilizadas em redes de sensores sem fio, como os métodos de Gauss-Newton e de Levenberg-Marquadt, são alternativas viáveis para o problema de localização proposto, provendo boas estimativas quando em diferentes cenários práticos de objetos enterrados. Os métodos alcançam um desempenho aceitável mesmo para o modelo aproximado desenvolvido neste estudo, que pode, dessa forma, ser utilizado para aplicações que requeiram acurácia, mas que não consigam lidar com alta complexidade. Além disso, o efeito da estimativa inicial no desempenho foi avaliado considerando a aleatoriedade na estimativa, o que resultou em desempenho ruim quando comparado ao caso em que padrões de espalhamento são conhecidos. Trabalhos futuros incluem o estudo do efeito de uma etapa de calibração, exploração do modelo aproximado em outros cenários, assim como o desenvolvimento de outras possíveis formulações.

REFERÊNCIAS

- [1] M. R. Yenchek, G. T. Homce, N. W. Damiano, and J. R. Srednicki, *Niosh-sponsored research in through-the-earth communications for mines: a status report*. Industry Applications, IEEE Transactions on, vol. 48, no. 5, pp. 1700–1707, 2012
- [2] T. D. Barkand, N. W. Damiano, and W. Shumaker, *Through-the-earth, two-way, mine emergency, voice communication systems* Conference Record of the 2006 IEEE, vol. 2. IEEE, pp. 955–958, 2006
- [3] Martincic, F., Schwiebert, L. Stojmenovic, I., *Handbook Of Sensor Networks - Algorithms And Architectures*. John Wiley&Sons, Inc, pp. 1-40, 2005
- [4] Guoqiang, M., Fidan, B. and Anderson, B. D. O., *Wireless sensor network localization techniques*, Computer Networks: The International Journal of Computer and Telecommunications Networking, Volume 51 Issue 10, pp. 2529-2553, 2007
- [5] Patwari, N., *Location estimation in sensor networks*, University of Michigan, pp. 19-51, 2005
- [6] F. H. Raab and I. R. Joughin, *Signal processing for through-the-earth radio communication* Communications, IEEE Transactions on, vol. 43, no. 12, pp. 2995–3003, 1995
- [7] Carreño, J., Silva, L., Neves, S., Aguayo, L., Braga, A.J., Barreto, A.N. and Garcia, L.U., *Through-The-Earth (TTE) Communications for Underground Mines*. Journal of Communication and Information Systems, 31, 2016
- [8] Hazewinkel, Michiel, *Polar coordinates*. Encyclopedia of Mathematics, Springer Science+Business Media B.V. / Kluwer Academic Publishers, 2001
- [9] Press, William H.; Teukolsky, Saul A.; Vetterling, William T.; Flannery, Brian P. *Numerical Recipes: The Art of Scientific Computing*. New York: Cambridge University Press, 1986
- [10] J. Nocedal and S.J. Wright, *Numerical Optimization*, Springer, New York, 1999
- [11] Griva, Igor; Nash, Stephen; Sofer Ariela. *Linear and Nonlinear Optimization*. 2nd ed. Society for Industrial Mathematics, 2008.
- [12] Dennis J. E. e Schnabel R.B. *Numerical Methods for Unconstrained Optimization and Nonlinear Equations*. SIAM, Philadelphia, PA, 1996
- [13] Polak, E., *Optimization : Algorithms and Consistent Approximations*. Springer-Verlag, 1997
- [14] P.E. Frandsen, K. Jonasson, H.B. Nielsen and O. Tingleff, *Unconstrained Optimization*, 3rd Edition, IMM, DTU, 2004
- [15] D.Marquardt: *An Algorithm for Least Squares Estimation on Nonlinear Parameters*. SIAM J. Appl. Math. 11, pp 431–441, 1963
- [16] K. Madsen, H.B. Nielsen, O. Tingleff, *Methods For Non-Linear Least Squares Problems, Informatics and Mathematical Modeling*, Technical University of Denmark 2nd Edition, April, 2004