

# Codificação para o Canal Gaussiano de Múltiplo Acesso

Marco Cazarotto e Renato da Rocha Lopes

**Resumo**— Neste artigo propomos uma estratégia de Codificação para o Canal Gaussiano de Múltiplo Acesso. Estamos interessados no problema do ponto de vista do primeiro usuário, onde vamos tratar o sinal do segundo usuário como ruído na detecção. Esta estratégia é conhecida como cancelamento de interferência e vamos utilizar o código Low Density Parity Check (LDPC). Na detecção, o LDPC assume que o ruído é gaussiano. Isto não se verifica na detecção do primeiro usuário se o sinal do segundo usuário for, por exemplo, 2-PSK. Com isso, vamos propor duas estratégias para modificar a distribuição do segundo usuário, de forma, que esta se aproxime de uma distribuição gaussiana. A primeira estratégia é utilizando Shaping e a segunda é utilizando a Transformada de Fourier. Vamos comprovar que as duas estratégias têm melhor desempenho comparadas a estratégia envolvendo modulação com distribuição discreta uniforme.

**Palavras-Chave**— Canal Gaussiano de Múltiplo Acesso, Low Density Parity Check, Shaping, Transformada de Fourier.

**Abstract**— In this paper we propose a coding strategy for the two-user Gaussian Multiple Access Channel. We are interested in the problem from the point of view of the detection of the first user, which will treat the signals from the other user as noise. This strategy is known as Successive Interference Cancellation (SIC). Our coding scheme is based on the Low Density Parity Check (LDPC) codes. On detection, LDPC assumes that the noise is Gaussian. This is not true for the first user, if, e.g., the other user uses 2-PSK modulation. Therefore, we propose two new strategies to modify the second user's distribution, aiming at making it more Gaussian. The first strategy will utilize Shaping and the second one is based on the discrete Fourier transform. We will show that both strategies outperform the strategy of using a 2-PSK modulation for the second user.

**Keywords**— Gaussian Multiple Access Channel, Low Density Parity Check, Shaping, Fourier Transform.

## I. INTRODUÇÃO

O Canal Gaussiano de Múltiplo Acesso é caracterizado por ter vários transmissores (usuários) e apenas um receptor, além de estar sujeito a ruído aditivo gaussiano branco. Estamos interessados em estudar estratégias para atingir a maior proximidade da capacidade do canal gaussiano calculada por Shannon [1]. Para chegarmos o mais próximo possível da capacidade é necessário o uso de codificação. Vamos trabalhar com o código Low Density Parity Check (LDPC), que foi proposto por Gallager [2] em 1962, quando o próprio Gallager introduziu também o seu algoritmo de decodificação, conhecido hoje como algoritmo Soma-Produto. O algoritmo de decodificação

Marco Cazarotto e Renato da Rocha Lopes, Departamento de Comunicações, Universidade Estadual de Campinas, Campinas-SP, Brasil, E-mails: marcoczt@decom.fee.unicamp.br, renato@decom.fee.unicamp.br. Este trabalho foi parcialmente financiado pelo CNPq.

pressupõe que o ruído tem distribuição gaussiana. Vamos nos valer dessa informação para propor nossas estratégias.

Vamos abordar o canal gaussiano com dois usuários, que serão definidos como primeiro e segundo usuários. Vamos abordar o problema do ponto de vista de transmissão do primeiro usuário. Este irá transmitir no canal que terá ruído gaussiano, além do segundo usuário transmitindo simultaneamente. Vamos propor duas estratégias para a alteração do segundo usuário para que ele tenha uma distribuição estatística próxima da gaussiana. Na primeira estratégia vamos utilizar Shaping [3] e na segunda iremos utilizar a Transformada de Fourier. Ambas as estratégias vão modificar a distribuição estatística, são normalmente uniformes, e aproximá-las da distribuição gaussiana. Ou seja, vamos comparar dois métodos de gaussianização de interferência em um canal de Múltiplo Acesso Gaussiano. Na detecção, usaremos Cancelamento de Interferência, onde a detecção do primeiro usuário trata o segundo usuário como ruído [4]. O problema do uso de LDPC nesse caso é que a decodificação assume ruído gaussiano, e isso não se verifica na detecção do primeiro usuário se o sinal do segundo usuário for, por exemplo, 2-PSK.

Nossas simulações mostram que as duas estratégias, utilizando tanto Shaping e Transformada de Fourier têm uma menor taxa de erro de bit, comparada a modulação com distribuição uniforme. O ganho é de cerca de 0.1 dB, mas obtido com baixo custo.

## II. CANAL GAUSSIANO

Neste trabalho vamos abordar o problema do Canal Gaussiano de Múltiplo Acesso utilizando Low Density Parity Check. Para isso, vamos definir inicialmente alguns conceitos.

O canal gaussiano (Additive White Gaussian Noise - AWGN) é dado por [1], [4]:

$$y[m] = x[m] + w[m] \quad (1)$$

onde  $x[m]$  e  $y[m]$  são a entrada e saída no tempo e  $w[m]$  é o ruído, onde este é  $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$  e é independente e identicamente distribuído e  $m$  é o instante de tempo.

A capacidade deste canal para transmissões envolvendo apenas símbolos reais foi demonstrada Shannon e é dada por [4]:

$$C_{awgn} = \frac{1}{2} \log \left( 1 + \frac{P_x}{\sigma^2} \right), \quad (2)$$

onde  $P_x = E\{|x|^2\}$  é a potência do sinal a ser transmitido e  $\sigma^2$  é a potência do ruído gaussiano aditivo. Com isso, a taxa de transmissão do sinal é:

$$R_x \leq \frac{1}{2} \log \left( 1 + \frac{P_x}{\sigma^2} \right). \quad (3)$$

Sabe-se que para conseguirmos chegar o mais próximo possível da capacidade de Shannon é necessário o uso de codificação. A codificação é realizada como mostrado na Fig. 1 [4]. O sinal a ser transmitido deve ser codificado e posteriormente vai ser transmitido pelo canal, depois será decodificado na recepção. Para o problema de decodificação para ruído gaussiano possui soluções muitas boas, que se aproximam da capacidade a um custo de codificação e decodificação viáveis. São os códigos Turbo e Low Density Parity Check (LDPC) [5], [6]. Neste trabalho optamos por utilizar o LDPC.

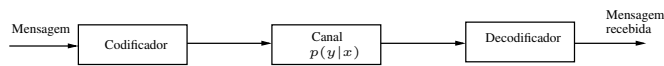


Fig. 1. Ilustração da estratégia para atingir a maior proximidade de capacidade.

### III. CANAL DE MÚLTIPLO ACESSO

Conhecendo o canal AWGN, vamos supor que dois usuários tentem transmitir seus sinais  $x_1[m]$  e  $x_2[m]$ , para um mesmo receptor. Neste caso sinal recebido para o caso real, será dado por:

$$y[m] = x_1[m] + x_2[m] + w[m]. \quad (4)$$

Esse canal é conhecido como Canal Gaussiano de Múltiplo Acesso [4].

Para este caso, a taxa está limitada a:

$$R_x = R_{x_1} + R_{x_2} \leq \frac{1}{2} \log \left\{ 1 + \frac{P_{x_1} + P_{x_2}}{\sigma^2} \right\}, \quad (5)$$

onde  $R_{x_1}$  e  $R_{x_2}$  são as taxas do primeiro e segundo usuário, respectivamente. Além disso, cada uma das taxas  $R_{x_1}$  e  $R_{x_2}$  está limitado a (3).

Posto isso, uma estratégia para estimar os dois usuários,  $x_1$  e  $x_2$ , seria supor primeiramente que  $x_2[m]$  seja ruído, ou seja, do ponto de vista de  $x_1[m]$ , o ruído será  $x_2[m] + w[m]$ . Uma vez estimado  $x_1[m]$ , subtrai-se o mesmo de  $y[m]$ , e estima-se  $x_2[m]$  como se fosse um canal gaussiano com apenas um usuário. Esta estratégia é chamada de Cancelamento de Interferência (Successive Interference Cancellation - SIC) e permite atingir os pontos conhecidos como as quinas da região de capacidade [4].

O maior problema para este tipo de canal é determinar códigos que operem a taxas mais próximas da capacidade de Shannon. Para este problema existem alguns trabalhos na literatura, abordando o problema por diferentes ângulos. Existem alguns trabalhos voltados para o projeto de LDPC para Canal de Múltiplo Acesso Gaussiano de dois usuários [7], [8], [9], [11]. Neste trabalho a preocupação é com a quina de capacidade. Existem alguns trabalhos preocupados com a alocação de taxa [10]. Neste é estudada a otimização das taxas para o problema do Canal Gaussiano de Múltiplo Acesso de dois usuários com desvanecimento. Em [12] são discutidos vários códigos para o Canal Gaussiano de Múltiplo Acesso.

A maioria dos trabalhos citados trabalha no projeto de códigos. Nós vamos abordar o problema de uma forma diferente. Estamos preocupados com a estratégia de transmissão, principalmente a estimação do primeiro usuário. Quando os dois usuários utilizam modulação 2-PSK, temos alguns problemas, principalmente quando o ruído tem potência próxima ao do sinal. Neste caso o demodulador tem dificuldade para estimar o símbolo transmitido. Para evitar este problema, vamos propor duas soluções, modificando o segundo usuário. As duas estratégias partem do fato que a decodificação utilizando LDPC assume que o ruído é gaussiano. Como, do ponto de vista do primeiro usuário, o ruído é composto pelo segundo usuário, somado o ruído gaussiano, vamos propor um método para alterar o segundo usuário, deixando-o com a distribuição mais próxima da gaussiana possível. Isso será feito de duas formas: a primeira utilizando Shaping [3], [14], e a segunda utilizando a Transformada de Fourier.

### IV. SHAPING

Shaping é um método para selecionar os valores de menor potência de uma determinada sequência a ser transmitida de forma que a modulação resultante tenha uma constelação com um aspecto mais arredondado do que as constelações quadradas geralmente utilizada. Uma possibilidade de fazer isto é usando a modulação circular apresentada na Fig. 2. A Fig. 2 também apresenta uma modulação quadrada, mais comum nas nossas aplicações. A constelação circular tem menor variância que a constelação quadrada para a mesma taxa de erro de bit, uma vez que cada ponto que é movido em relação a constelação quadrada para a constelação circular apresenta uma menor energia, contribuindo para uma modulação com menor potência. O resultado dessa redução de potência é chamado de Shaping gain. Além disso, o Shaping também muda a distribuição da constelação. Enquanto a modulação quadrada tem uma distribuição uniforme, a constelação circular passa a ter uma distribuição não-uniforme, mais próxima de uma distribuição gaussiana [14]. O Shaping também realizado através de códigos convolucionais, e através de códigos bem construídos atinge-se ganho de até 1.53 dB, nas curvas de capacidade [3]. A vantagem do código convolucional é a redução de complexidade e o fato de que o Shaping passa a ser feito em vários símbolos consecutivos. Este aumento na dimensão melhora o ganho [3].

Na verdade, com o uso de código convolucional, ainda se utiliza a modulação quadrada, mas optando por transmitir símbolos com menor potência. A Fig. 3 ilustra esse processo. Para o 256-QAM, todos os símbolos selecionados na Fig. 3 tem a mesma informação, sendo selecionadas de forma a minimizar a energia. Mas para diminuir a energia, não basta optar pelo bit selecionado de menor energia, caso em que a decisão de qual dos quatro símbolos seria tomado símbolo a símbolo e a escolha é óbvia. Neste caso, o mesmo símbolo seria sempre escolhido, com isso o ganho de potência seria anulado pela perda de taxa. Para contornar a perda de taxa, [3] propõe que a escolha dos símbolos também traga informação. No exemplo da Fig. 3, a parte real é associada a 4 bits, denominadas *zabc*. O bit mais significativo, *z*, será responsável

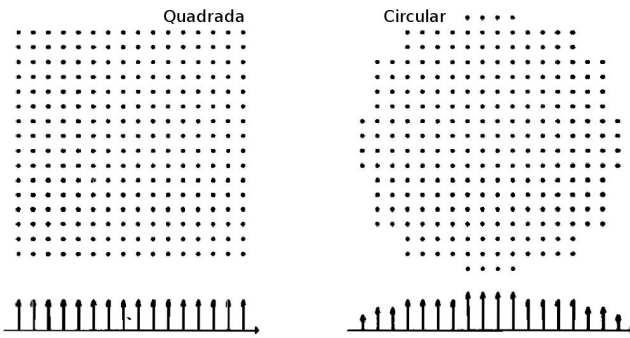


Fig. 2. Ilustração comparando as constelações quadrada e circular e suas respectivas distribuições [14].

por escolher qual dos símbolos será transmitido. É importante frisar que esta escolha não é individual. Você deve selecionar os bits mais significativos, que vamos chamar de bits de sinal, através do algoritmo de Viterbi para minimizar a energia de toda uma sequência. Conforme descreveremos a seguir, o uso de códigos convolucionais permite que a escolha de  $z$  diminua a energia e ao mesmo tempo traga alguma informação.

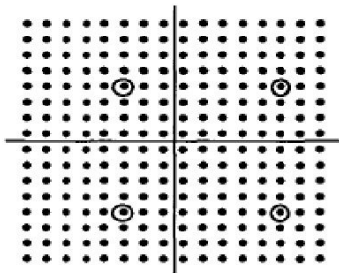


Fig. 3. Ilustração de uma constelação para a modulação 256-QAM [3].

Para executarmos o Shaping, iremos utilizar uma código convolucional de taxa  $1/2$  com uma matriz geradora  $G$ , ou seja, a cada entrada teremos dois bits na saída. Como sempre, este código também está associado a uma matriz de síndrome  $H^T$ , onde

$$GH^T = 0. \quad (6)$$

Utilizando um 16-PAM com alfabeto  $A = -(M-1)/2, \dots, -1/2, 1/2, \dots, (M-1)/2$ , por exemplo, temos 4 bits por transmissão. O mapeamento do alfabeto será feita como mostra a Fig. 4. Note que para a amplitude de  $-15/2$ , os bits relacionados são 1000 e que para a amplitude de  $1/2$  eles são 0000, ou seja, a diferença é apenas no bit de sinal. Note também que isso se mantém para todos os símbolos respeitando a mesma diferença de distância. Vamos definir os bits como  $zabc$ , sendo que  $z$  será o bit de sinal e os bits remanescentes  $abc$ , serão os bits menos significativos. Então, o método, consiste basicamente em alterar o bit de sinal, para escolher a menor amplitude. O bit de sinal  $z$  é gerado pela síndrome [3], [5], [6] e pela minimização de Viterbi. O bit  $z$  será formada pela soma de  $z_1 \oplus z_2$ , onde

$z_1$  é a saída da síndrome e  $z_2$  é uma palavra código de  $G$ , escolhida por Viterbi para minimizar a energia resultante. A operação de síndrome é representada pelo  $H^{-1T}$  na Fig. 5. Para gerar o bit  $z_1$ , fazemos:

$$z_1 = s(H^T)^{-1}, \quad (7)$$

onde para cada bit na entrada  $s$ , teremos dois bits  $z_1$ . A operação 7 pode ser interpretada com um código convolucional. A entrada  $s$ , que afeta diretamente a escolha dos símbolos na Fig. 3, são bits de informação. Ou seja, agora a escolha dos símbolos trás informações, de forma que a perda de taxa é menor que se as escolhas fossem feitas símbolo a símbolo. Na recepção faz  $s = zH^T$ . Como  $z_2$  é uma palavra código,  $zH^T = z_1H^T = s$  e recupera-se a informação. Note que  $zH^T$ , pode ser implementado com um código convolucional. Para cada entrada a operação de síndrome gera dois bits na saída e a sequência toda de bits gerados através da síndrome estão relacionados uns com os outros. Além disso, o bit de síndrome passa pelo algoritmo de Viterbi para minimização de energia. Depois, das duas etapas, síndrome e Viterbi, o bit de sinal gerado  $z$ , junta-se aos bits  $abc$  para serem codificados e modulados.

Uma vez realizado o Shaping, devemos fazer a transmissão usando LDPC. Para isso, precisamos adotar uma procedimento, onde temos de fazer a codificação, sem perder a informação dos bits de Shaping. É preciso notar que para fazermos Shaping e conseguirmos determinar os bits de sinal, precisamos da sequência toda a ser transmitida. Além disso, precisamos de todos os bits de sinal para gerar sua paridade com o LDPC. A solução é transmitir as paridades dos bits de sinal após um atraso. Ou seja, transmitimos os bits de sinal, com a paridade dos bits de sinal da transmissão anterior. Na primeira transmissão, como não existe a os bits de paridade da transmissão anterior, iremos gerar bits que serão desprezados na decodificação. Isso será feito através da estrutura mostrada na Fig. 5. Suponha que temos uma mensagem de tamanho  $k$  bits. Destes,  $k'$  bits irão passar pelo processo de síndrome e vão gerar os  $2k'$  bits que após passarem pelo algoritmo de Viterbi vão gerar os bits anteriormente chamados de bit de sinal ou  $z$ . Os  $k - k'$  bits restantes serão os bits  $abc$ . Todos os bits deveram ser codificados através do LDPC de comprimento  $n$ . Com isso, teremos bits de paridade gerados pelo código, resultando em  $k + k' + p$  bits. Os bits serão modulados através do 16-PAM, depois transmitidos no canal gaussiano.

A recepção é feita como mostrado na Fig. 6. Para fazer a demodulação, como estamos trabalhando com LDPC, devemos utilizar o log likelihood ratio (LLR) [13]. Então devemos calcular LLR para cada bit dentro de um símbolo dada a saída do canal.

Depois, novamente temos que levar em consideração o fato da paridade estar atrasada em relação ao bits transmitidos, então devemos atrasar os bits de mensagem e Shaping no receptor. Uma vez acertado este passo, fazemos a decodificação, depois o processo inverso da síndrome para obter  $s$ .

Note que, para calcularmos a taxa, devemos levar em consideração a modulação, a taxa do código e entradas do Shaping. Utilizando um 16-PAM, vamos ter 4 bits por

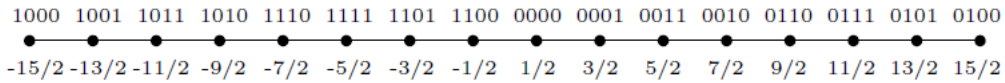


Fig. 4. Alfabeto

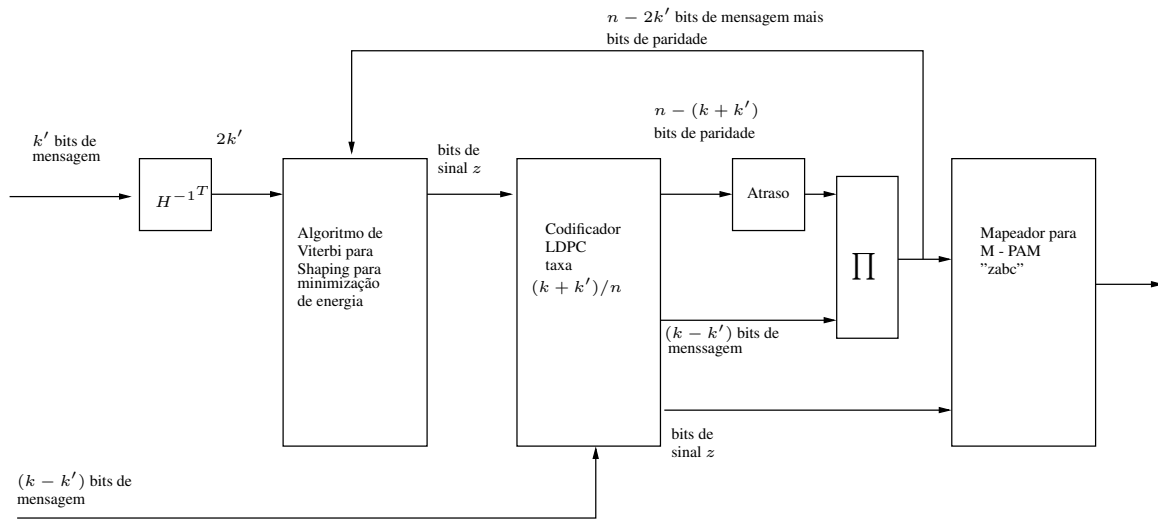


Fig. 5. Ilustração da estratégia de codificação para Shaping [13].

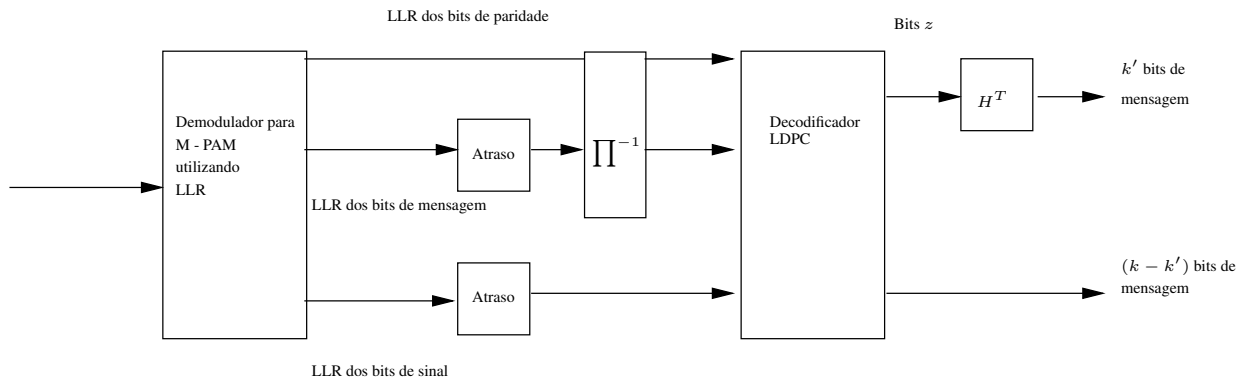


Fig. 6. Ilustração da estratégia de decodificação para Shaping [13].

transmissão, sendo esses  $zabc$ , como explicado anteriormente. Supondo a taxa do LDPC de  $1/2$ , temos que os bits de informação serão apenas  $z$  e  $a$ , enquanto os bits  $b$  e  $c$  serão a paridade do LDPC. Além disso, devemos considerar a síndrome que tem taxa  $1/2$ , logo o bit  $z$  tem taxa  $1/2$  de bit por transmissão. Resumindo, considerando os 4 bits e a taxa do LDPC de  $1/2$ , 2 bits serão paridades ( $b$  e  $c$ ), e teremos 1 de informação através de  $a$  e  $1/2$  bit de informação de  $z$ . Logo, a informação em um bloco do gerado pelo processo de codificação será de 1.5 bits por transmissão. A taxa mínima que conseguimos atingir com esse esquema de transmissão é  $1/2$ . Isso acontece quando transmitimos apenas os bits de síndrome. Neste caso temos de usar um LDPC com taxa  $1/4$

e os bits  $abc$  serão paridade. A informação a ser transmitida estará apenas no bit de sinal, e este com taxa  $1/2$ . Neste caso estamos com a taxa do LDPC/Shaping igual a  $1/8$ , multiplicando por 4 (16-PAM), temos a taxa de  $1/2$ .

## V. TRANSFORMADA DE FOURIER

Vamos utilizar uma segunda estratégia, onde vamos fazer a Transformada de Fourier do sinal do segundo usuário após a modulação. Essa segunda estratégia parte do fato que a Transformada de Fourier é uma soma de variáveis aleatórias independentes modulados em senos, e com isso gera uma distribuição próxima da distribuição gaussiana [15].

## VI. CENÁRIO E RESULTADOS

Vamos comparar algumas estratégias de transmissão, sendo o primeiro utilizando dois usuários com modulação 2-PSK e codificação LDPC. O codificador utilizado foi o `dvbs2ldpc` do matlab. O segundo cenário será com o primeiro usuário sendo modulado através do 2-PSK e o segundo utilizando Shaping através de um 16-PAM. O terceiro cenário também será com dois usuários utilizando 2-PSK, mas vamos fazer a Transformada de Fourier deste após a modulação. Ainda vamos apresentar a curva com apenas um usuário e ruído gaussiano e a curva de capacidade. Vamos manter constante e igual a potência de segundo usuário e a potência do ruído e vamos variar a potência do primeiro usuário. Vamos usar a taxa do LDPC igual a 1/4 para o primeiro usuário e 1/2 para o segundo usuário. Para o LDPC, estamos usando blocos de comprimento 64800. Para o Shaping vamos a matriz  $H^T = [1 + D + D^2, 1 + D]^T$ ,  $H^{T^{-1}} = [D, 1 + D]^T$  e  $G = [1 + D, 1 + D + D^2]$ . Com isso, temos a entrada da síndrome de tamanho 8100 e a taxa do LDPC sendo igual a 1/4. A Fig. 7 apresenta a comparação de todas as curvas.

Como definimos anteriormente, do ponto de vista do primeiro usuário, o ruído será formado pela soma do segundo usuário, mais o ruído gaussiano. Estamos utilizando Shaping e a Transformada de Fourier, para que o segundo usuário, tenha uma distribuição mais próxima da gaussiana. Com isso, do ponto de vista do primeiro usuário teríamos um ruído com distribuição mais próxima da gaussiana, do que, quando utilizamos a modulação 2-PSK, por se tratar de uma modulação uniforme. Então, se a soma fosse realmente gaussiana, teríamos com resultado a curva em vermelho, na qual atingimos uma taxa de erro de bit (Bit Error Ratio - BER) de  $10^{-5}$  quando temos uma relação sinal ruído (Signal-noise ratio - SNR) em torno de  $-2.34$  dB. Para o cenário utilizando dois usuários com modulação 2-PSK, obtivemos um resultado um pouco inferior, atingindo a mesma BER por volta de  $-2.3$  dB. Para os dois cenários que propomos, obtivemos resultando melhores que se tivéssemos ruído puramente gaussiano. Para os cenários utilizando Shaping e a Transformada de Fourier, atingimos a taxa de erro de  $10^{-5}$  próximo a  $-2.42$ dB. Além disso, com um codificador LDPC mais eficiente, as curvas estariam mais próximas da capacidade.

## VII. CONCLUSÕES

Nós apresentamos um trabalho sobre o Canal Gaussiano de Múltiplo Acesso com dois usuários focando no primeiro usuário. Para atingirmos uma maior proximidade da capacidade do canal gaussiano, utilizamos a codificação LDPC. Do ponto de vista do primeiro usuário, o ruído é formado pela soma do segundo usuário e o ruído AWGN. Como o LDPC assume que o ruído é gaussiano, acreditamos que se o segundo usuário tendesse a uma distribuição gaussiana teríamos resultados melhores que se utilizássemos uma modulação uniforme.

Na tentativa de aproximar a distribuição estatística do segundo usuário para uma distribuição gaussiana, propomos duas soluções. A primeira utilizando Shaping e uma segunda utilizando a Transformada de Fourier. Nos dois casos, comparamos com o segundo usuário utilizando modulação 2-PSK

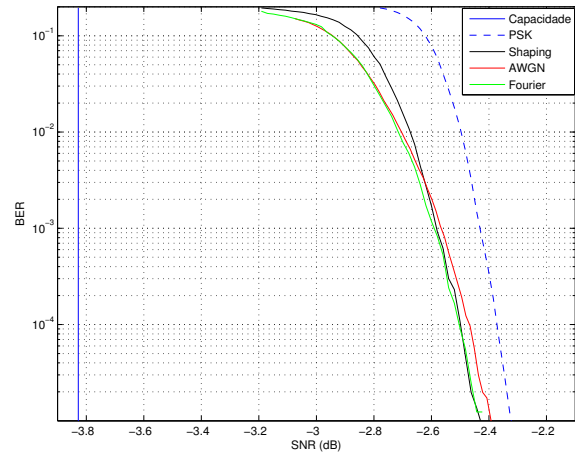


Fig. 7. Comparação das estratégias de transmissão para o primeiro usuário para Canal Gaussiano de Múltiplo Acesso.

e com um segundo usuário puramente formado por ruído gaussiano.

Nossas simulações mostram que nossas propostas obtiveram resultados melhores que os outros dois métodos. Além disso, sobre nossas propostas, o desempenho utilizando Shaping e a Transformada de Fourier foram muito parecidos, com ligeira superioridade do segundo método.

## REFERÊNCIAS

- [1] T. M. Cover and J. A. Thomas, *Elements of information theory*, Wiley, 1991
- [2] R. G. Gallager, *Low-density parity-check codes*. PhD, Massachusetts Institute of Technology, 1963.
- [3] G. D. Forney Jr, *Trellis shaping*. Information Theory, IEEE Transactions on 38.2, (1992):
- [4] D.Tse and P.Viswanath, *Fundamentals of Wireless Communication*. Cambridge University Press, 2005.
- [5] W. E. Ryan and S. Lin. *Channel codes: classical and modern*. Cambridge University Press, 2009.
- [6] S. Lin, and D. J. Costello. *Error control coding*. Vol. 123. Englewood Cliffs: Prentice-hall, 2004.
- [7] A. Roumy and D. Declercq *Characterization and optimization of LDPC codes for the 2-user Gaussian multiple access channel*. EURASIP Journal on Wireless Communications and Networking, Springer, 074890, 2007.
- [8] A. Roumy, D. Declercq, and Eric Fabre. *Low complexity code design for the 2-user gaussian multiple access channel*. Information Theory, 2004. Proceedings. International Symposium on. IEEE, 2004.
- [9] A. K. B. Stimming. *Design of LDPC Codes for the Two-User Gaussian Multiple Access Channel*. Diss. Technical University of Crete, 2012.
- [10] M. Grossmann, T. Ortlepp, and T. Matsumoto. *Rate allocation for 2-user MAC with MMSE turbo equalization*. Wireless Communications, IEEE Transactions on 9.3 (2010).
- [11] A. Yedla et al. *Universal codes for the Gaussian MAC via spatial coupling*. Communication, Control, and Computing (Allerton), 2011 49th Annual Allerton Conference on. IEEE, 2011.
- [12] R. Palanki. *Iterative decoding for wireless networks*. Diss. California Institute of Technology, 2004.
- [13] B. Saradka, S. Bhashyam, A. Thangaraj, *A dirty paper coding scheme for the Multiple Input Multiple Output Broadcast Channel*. Proc. National Conference on Communications (NCC) 2012, IIT Kharagpur, India, pp.3-5, Feb. 2012.
- [14] J.R. Barry, E. A. Lee and D. G. Messerschmitt. *Digital communication*. Kluwer Academic Pub, 2004.
- [15] J. AC. Bingham, *Multicarrier modulation for data transmission: An idea whose time has come*. Communications Magazine, IEEE 28.5, pp. 5-14, (1990).